Superficie

Def: Todos puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen una ecuación de tipo $S(x,y,z) = 0$

o $f(x,y,z) = 0$

ej: a plano
Es un conjunto de puntos que $\in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación de tipo:

$$ax + by + cz + d = 0$$

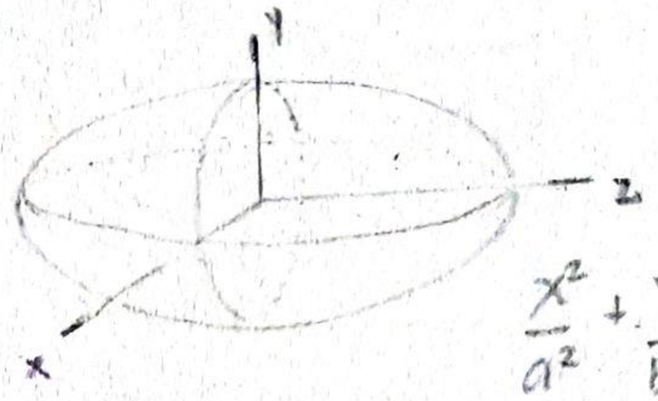
ej: $x^2+y^2+z^2 = 0$. No es una superficie aún cuando cumple $(0,0,0)$ **pero debe cumplir todo punto que $\in \mathbb{R}^3$**

ej: La Esfera de radio r a $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

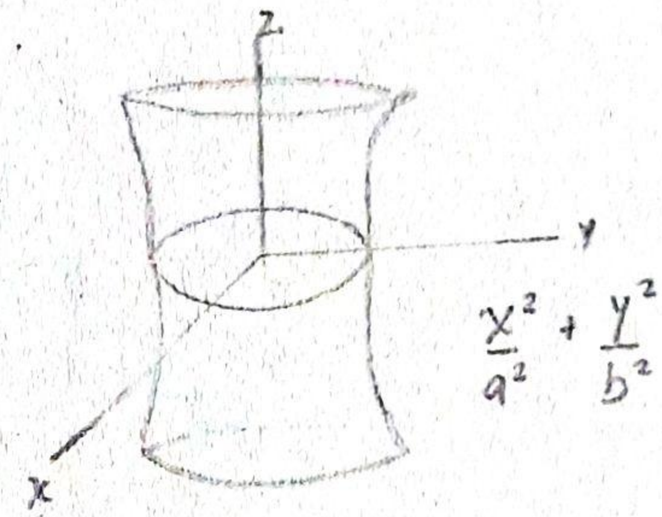
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

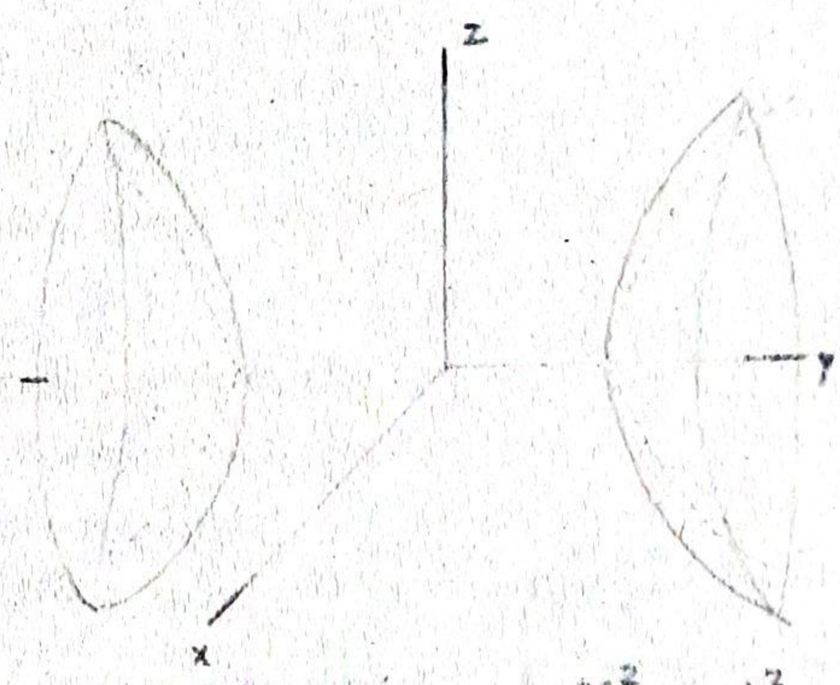
$$S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

05 Abril 2019

Superficie cuadrática

Def: Son superficies en donde las ecuaciones tienen terminos de 2° grado en las variables

x, y, z

LA ECUACIÓN general ES de la forma:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Fz+K=0$$

Además tenemos otra posibilidad

(I) CUÁDRICAS CON CENTRO (Centro de simetría)

Son de la forma

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$$

Se tiene Simetría:

- ELIPSOIDE (todos los coeficientes > 0)
- HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA (2 coeficientes > 0, 1 coeficiente < 0)
- HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS (1 coef > 0, 2 coef < 0)

(II) CUÁDRICAS SIN CENTRO (No tienen centro de simetría)

Se dan de la forma:

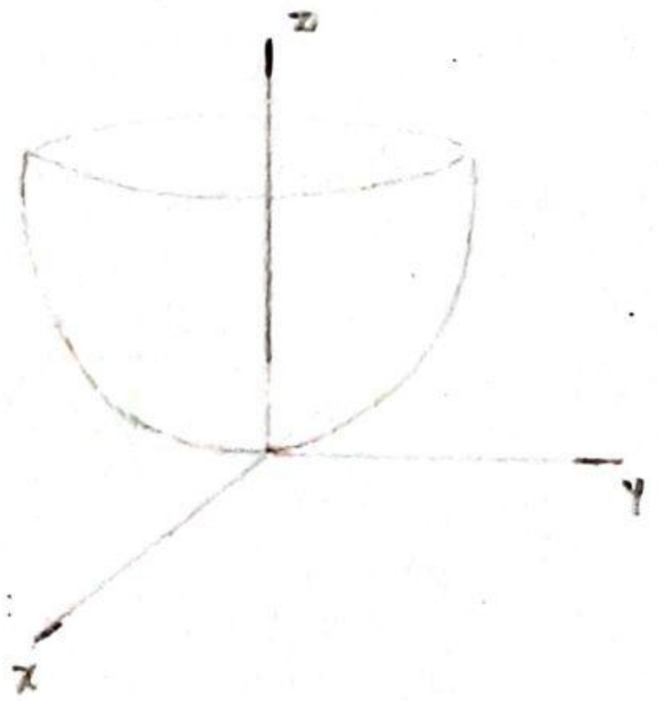
$$Mx^2 + Ny^2 = \int z$$

$$Ny^2 + \int z^2 = Mx$$

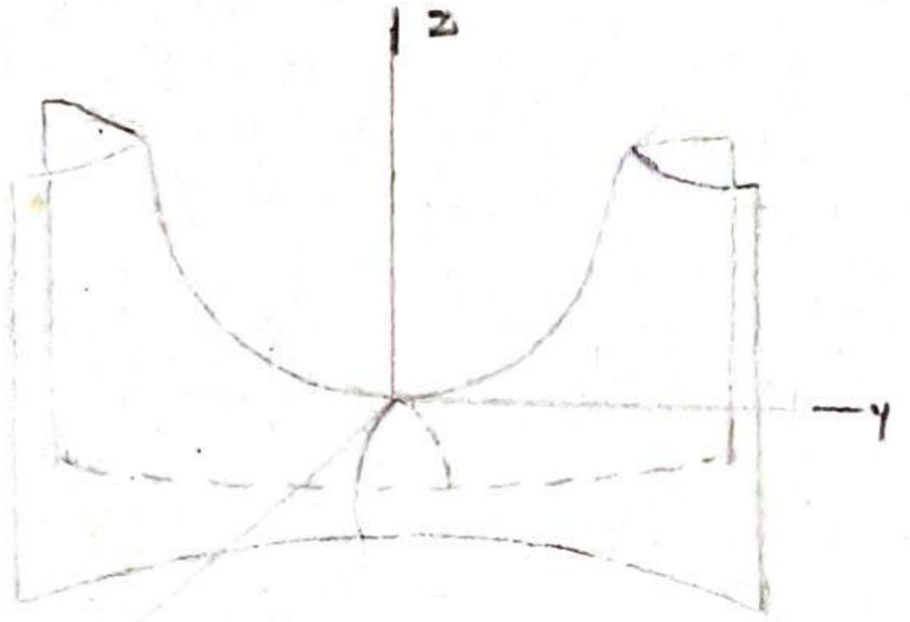
$$Mx^2 + \int z^2 = Ny$$

Se tiene:

- PARABOLOIDE ELÍPTICO (coeficientes de terminos de 2° grados tienen igual signo)
- PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (coeficientes de terminos de 2° grados tienen signo contrario)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

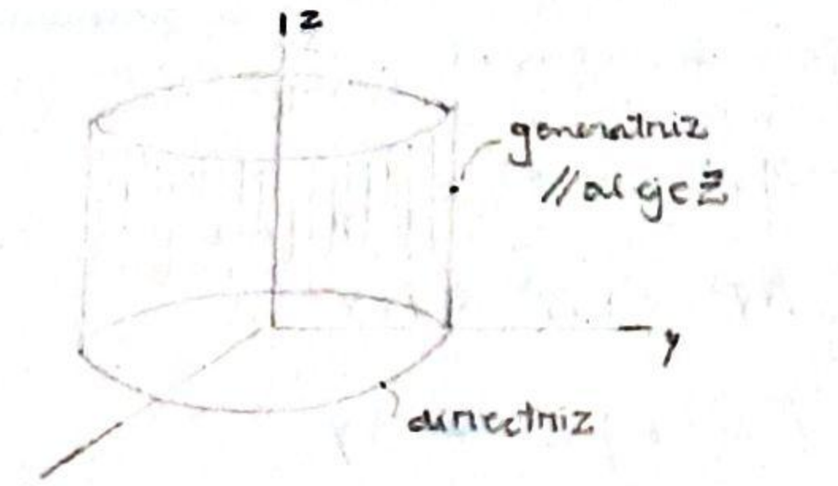


$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

(III) SUPERFICIE REGLADA

Son el CILINDRO, CONO; las variables dependen de una recta.

a. SUPERFICIE CILÍNDRICA



la ecuación de la forma:

$f(x,y) = 0$, considerando los $\mathbb{R}^2$ $(f(x,y)=0, z=0)$ representa una superficie reglada

$C : f(x,y) = 0 , z = 0$

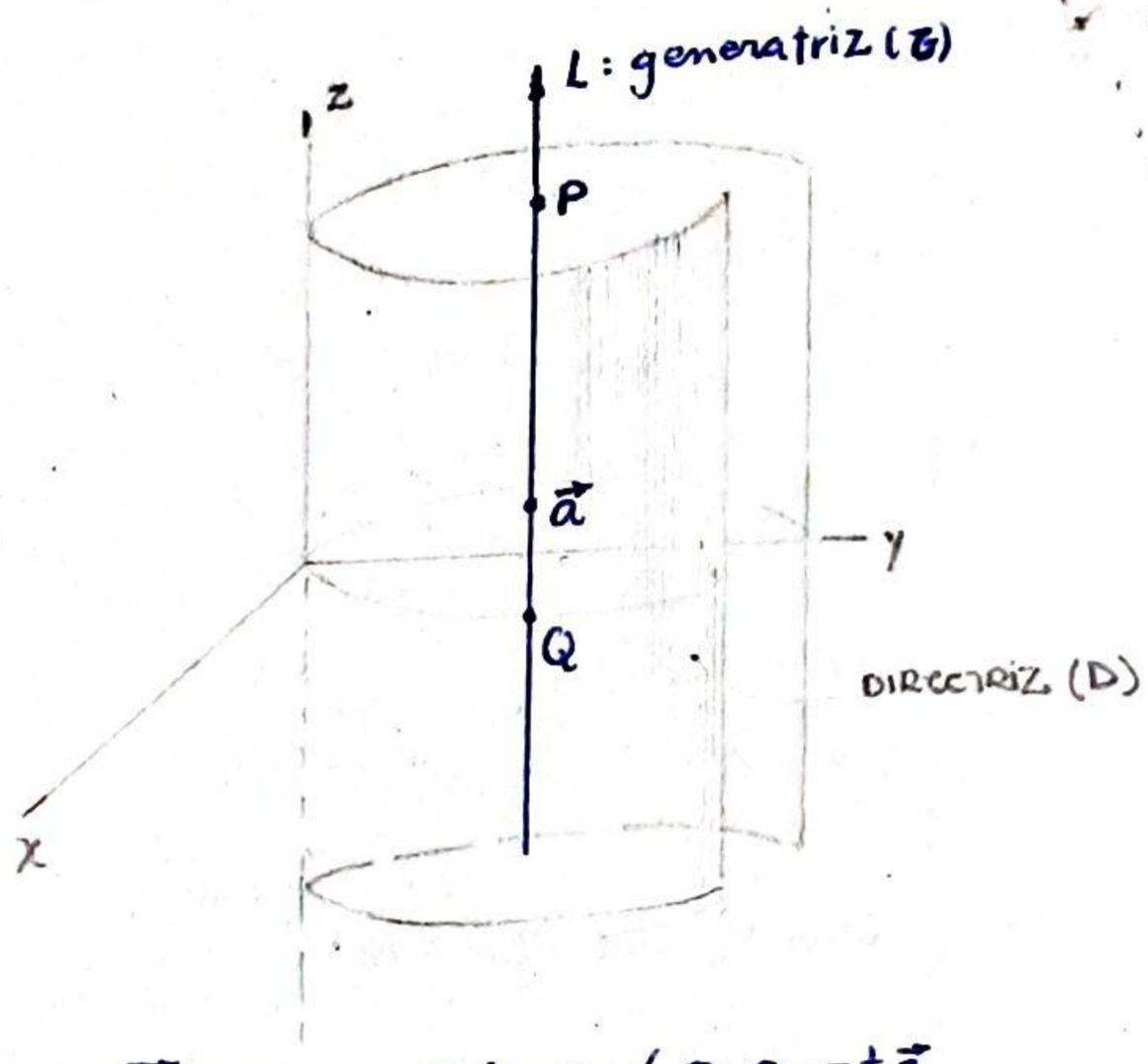
$S : \{ (x,y,z) \ / f(x,y) = 0 \}$

Ejem: $f(x,y) = 0 , z = 0$

a) $f(x,y) = x^2 - y = 0$

$C : x^2 - y = 0 , z = 0$

$S : \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 - y = 0 \}$, cilindro



$\vec{QP} // \vec{a} \leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} \ / \ P - Q = t\vec{a}$

forma vectorial L: $P = Q + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$

→ $P = (x,y,z)$, $Q = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1 \\ y &= y_0 + ta_2 \\ z &= z_0 + ta_3 \end{aligned}\right\}$$: Ecuación paramétrica de la generatriz L

→ LA ECUACIÓN SIMÉTRICA DE (G) generatriz

$$G : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Si $z = k$ ⇒ DIRECTRIZ ES $f(x,y,k) = 0$

esto quiere decir $L \cap D = Q = (x_0, y_0, k)$

⇒ $f(x_0, y_0, k) = 0$ — ①

⇒ $G : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - k}{a_3}$ — ②

De ① y ② se obtiene la ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE CILÍNDRICA

Al eliminar x_0, y_0 de ② se obtiene:

$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - k}{a_3}$ ⇒ $x_0 = x - \frac{a_1}{a_3}(z - k)$

$\frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - k}{a_3}$ ⇒ $y_0 = y - \frac{a_2}{a_3}(z - k)$

Sustituyendo tenemos:

$$f\left(x - \frac{a_1}{a_3}(z-k) , y - \frac{a_2}{a_3}(z-k) , k\right) = 0$$

$\xrightarrow{k=0}$

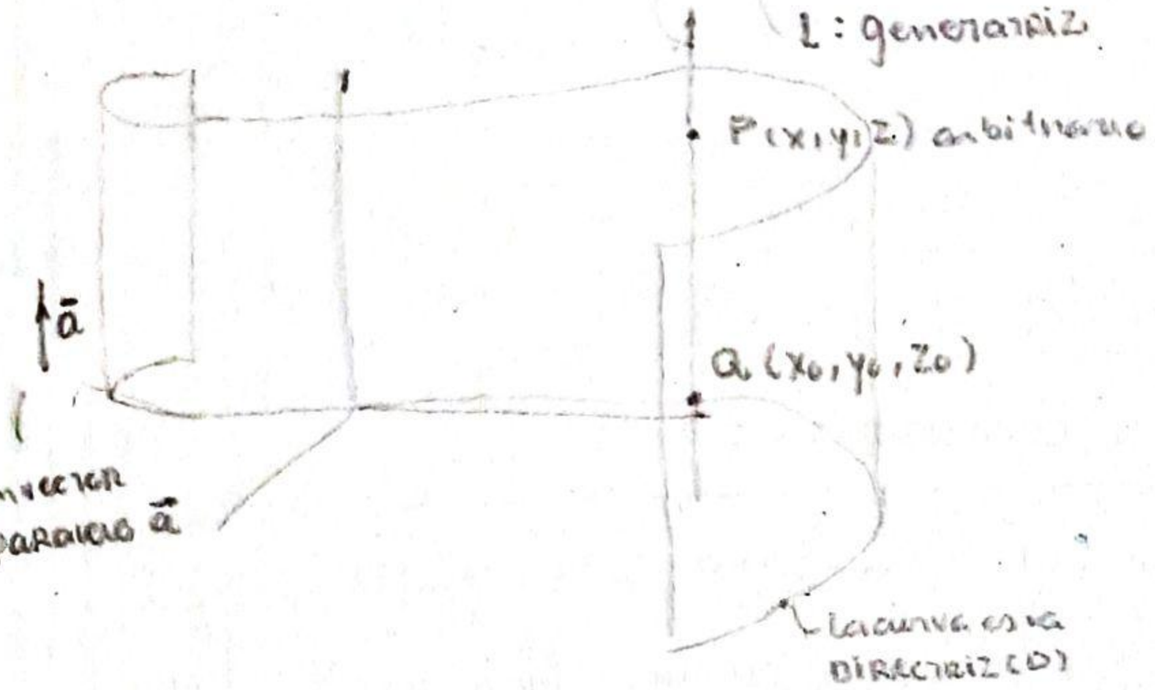
$$f\left(x - \frac{a_1}{a_3}z , y - \frac{a_2}{a_3}z , 0\right) = 0$$

11 Abril 2019

Viene anterior: se queda en Ecuación paramétrica de L

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \\ z &= z_0 + a_3 t \end{aligned}\right\}$$

SUPERFICIE CILÍNDRICA



$$L: \left\{ \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \right\} : \text{generatriz}$$

Ecuación simétrica

Si $z = K$ ⇒ LA DIRECTRIZ $D: f(x,y,K) = 0$

Tenemos $L \cap D = Q = (x_0; y_0; K) \in$ curva (C)

⇒ $f(x_0, y_0, K) = 0$ ... ①

También tenemos $G: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-K}{a_3}$ ... ②

De ① y ② obtenemos la Ecuación de la superficie cilíndrica, al x_0, y_0

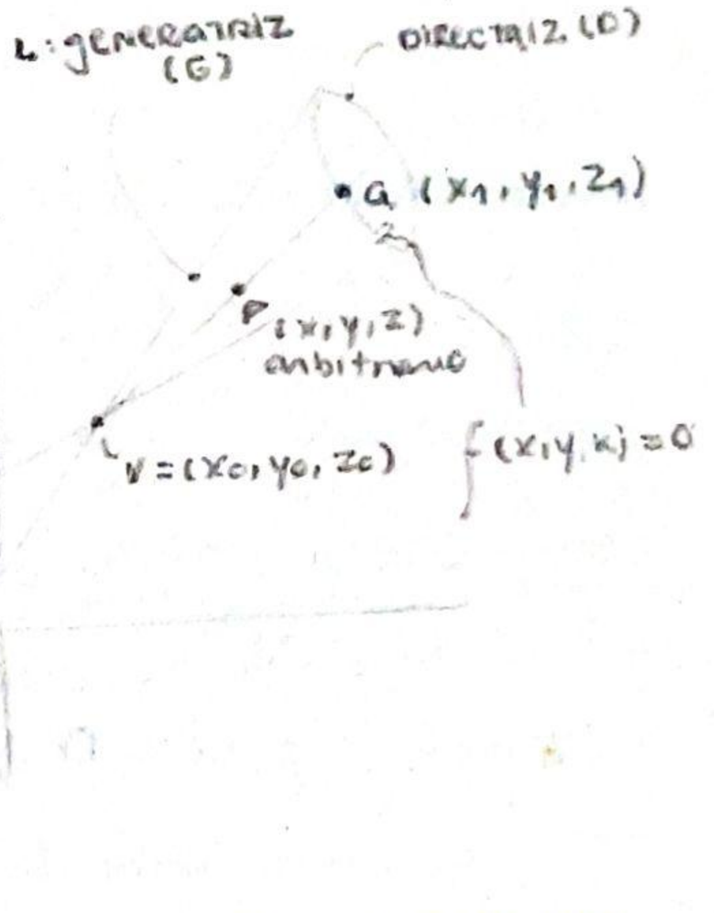
$$\left.\begin{aligned} * \ \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{z-K}{a_3} &\Rightarrow x_0 = x - \frac{a_1}{a_3}(z-K) \\ * \ \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-K}{a_3} &\Rightarrow y_0 = y - \frac{a_2}{a_3}(z-K) \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

(α) sustituyendo en ①

$$f\left(x - \frac{a_1}{a_3}(z-K),\ y - \frac{a_2}{a_3}(z-K),\ K\right) = 0$$

Si $K=0$ ⇒ $f\left(x - \frac{a_1}{a_2}z,\ y - \frac{a_2}{a_3}z, 0\right) = 0$

SUPERFICIE CÓNICA



Def: La superficie cónica se genera por una recta que pasa por una curva (D) y un punto Fijo llamado vértice.

PARA DETERMINAR LA ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE CÓNICA, SOLAMENTE DEBO CONOCER:

$$\left\{ \begin{aligned} &D: \text{DIRECTRIZ}, && f(x,y,K) = 0 \\ &V: \text{VÉRTICE}, && V = (x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \right\}$$

Tenemos un PUNTO ARBITRARIO $P(x,y,z)$.

$\overline{PV}$ intersecta a la DIRECTRIZ en el punto $Q(x,y,K) \in D$

⇒ $f(x,y,K) = 0$ ... ③

Tenemos: $\vec{VP} \parallel \vec{VQ} \Rightarrow \vec{VP} = t\vec{VQ}$

$$P - V = t(Q - V)$$

$$P = V + t(Q - V)$$ ecuación vectorial

Hallamos la Ecuación simétrica de L

⇒ $G: \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{K-z_0}$ ... ②

Despejando x_1 y y_1

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{z-z_0}{K-z_0} \Rightarrow x_1 = x_0 + \frac{(x-x_0)}{z-z_0}(K-z_0) \\ &\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{K-z_0} \Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{(y-y_0)}{z-z_0}(K-z_0) \end{aligned} \right\} (\alpha)$$

(α) en ③

$$f\left(x_0 + \frac{(x-x_0)}{z-z_0}(K-z_0),\ y_0 + \frac{(y-y_0)}{z-z_0}(K-z_0),\ K\right) = 0$$

Si $V(0,0,0)$

⇒ $f\left(\frac{Kx}{z}, \frac{Ky}{z}, K\right) = 0$

ejo el siguiente ejem es una aplicación directa, pero en examen se pedirá la deducción como se ha venido dando.

ejemplo:

Halle la Ecuación de la superficie cónica si:

D: $x^2 - 4z = 0$, $V = (2,3,2)$

Solución:

Tenemos un punto cualquiera $P(x,y,z)$ en la superficie cónica.

Trazando la generatriz L que pasa por:

P y $V(2,3,2)$

Además como $Q \in D \Rightarrow x_1^2 - 4z_1 = 0$, $y_1 = 0$ ... (1)

en la Dif $Q = (x_1, y_1, z_1)$, talque en general el $z_1 = k$ ahora en este caso $y_1 = k$

talque para todos los casos de ejercicios habrá un x_1, y_1, z_1 que será igual $k = 0$ o $k \in \mathbb{R}$ para cualquier valor

La Ecuación simétrica de L:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$V(x_0, y_0, z_0)$; $D(x_1, y_1, z_1)$

$V(2,3,2)$ $\quad D(x_1, 0, z_1)$

$$\frac{x - 2}{x_1 - 2} = \frac{y - 3}{0 - 3} = \frac{z - 2}{z_1 - 2} \quad \ldots (2)$$

Al encontrar se $y_1 = k = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2y - 3x}{y - 3} \qquad z_1 = \frac{2y - 3z}{y - 3} \quad \Big\} (\alpha)$$

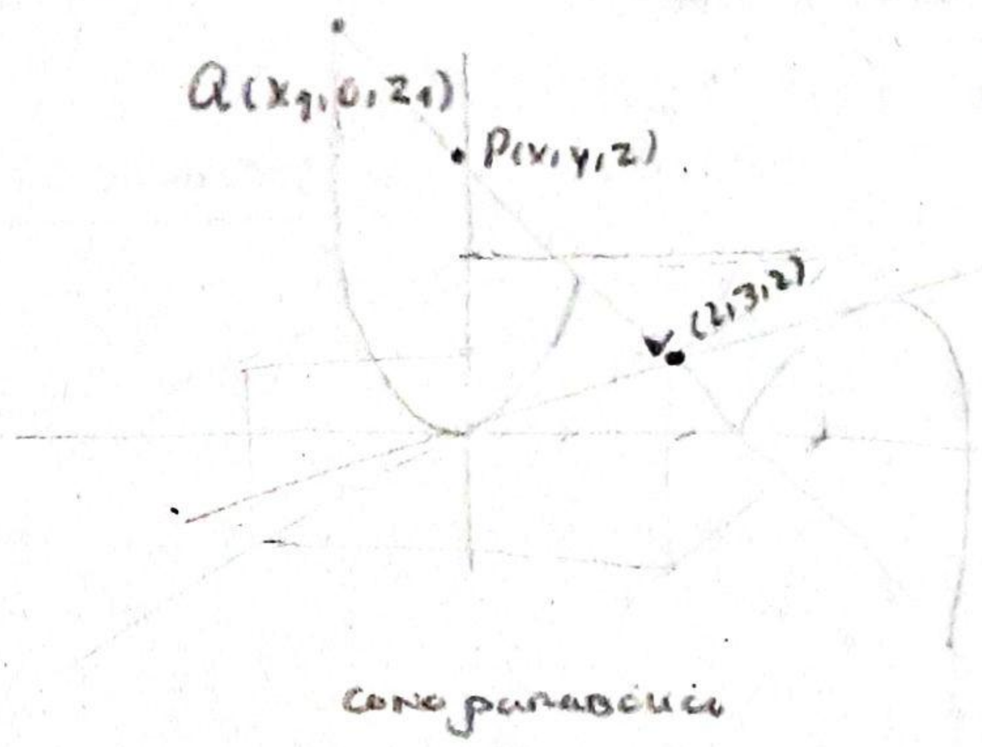
Reemplazando (α) en (1) tenemos:

$$\left(\frac{2y - 3x}{y - 3}\right)^2 - 4\left(\frac{2y - 3z}{y - 3}\right) = 0 \,, y = 0$$

Superficie cuadrática $\Leftrightarrow$ Coordenada cilíndrica esférica

$$\left(\frac{2x}{-3}\right)^2 + 4\left(\frac{2y - 3z}{-3}\right) = 0$$

$x^2 + 4z = 0$



Cono parabólico

COORDENADAS ESFÉRICA

Sea S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Cada punto $(x,y,z) \in S$ se puede proyectar sobre el plano xy, llamamos ϕ esta proyección.

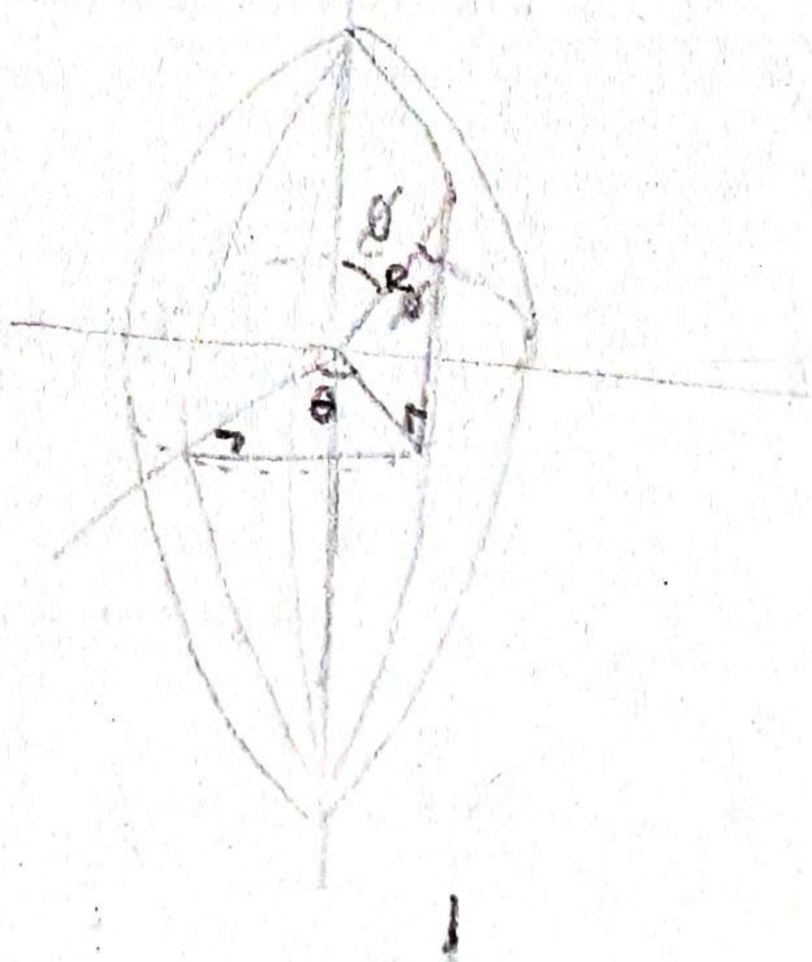
Sea $\theta = \sphericalangle(0a, x^+)$, x^+ es el eje positivo de los ejex y sea $\phi = \sphericalangle(0,P,z)$.

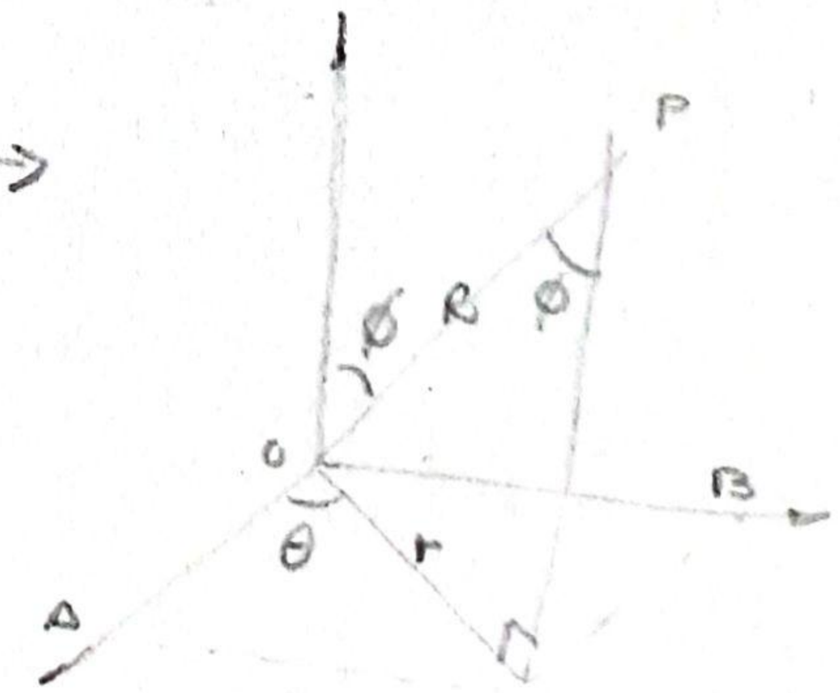
Tenemos la función, T: es decir:

$$T(x,y,z) \longrightarrow (\theta, \phi, R)$$

Donde hallamos θ y ϕ $\quad \rho \;\; \theta \;\; \varphi$

Transformación





$\operatorname{sen}\phi = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R\operatorname{sen}\phi$

$\cos\phi = \frac{z}{R} \Rightarrow z = R\cos\phi$

Luego tenemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\,\text{sen}\phi\cos\theta \\ y &= R\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta \\ z &= R\cos\phi \end{aligned}\right\} \text{ COORDENADAS}$$

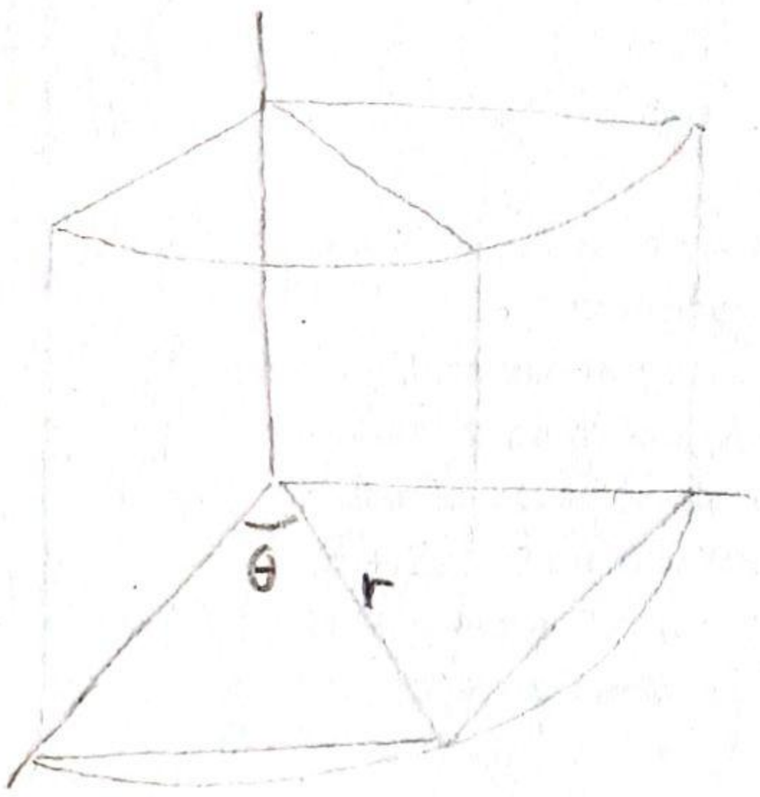
$$T:(x,y,z) \longrightarrow (\theta,\phi,R)$$

$$T^{-1}(\theta,\phi,R) \longrightarrow (x,y,z)$$

donde $\text{tg}\,\theta = y/x$, $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cos\phi = z/R$

COORDENADA CILÍNDRICA



$$T:(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z)$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\text{tg}\,\theta = y/x$, $z = z$

$$T^{-1}:(r,\theta,z) \longrightarrow (x,y,z)$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$
$z = z$

ej: graficar con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ el punto

sol:

$T:(r,\theta,z) \longrightarrow (x,y,z)$

$T:(2, 2\pi/3, 1) \longrightarrow (x,y,z)$

$x = 2\cos(2\pi/3) = -1$

$y = 2\,\text{sen}(2\pi/3) = \sqrt{3}$

$z = 1$

$(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z)$

$(-1,\sqrt{3},1)$

$r = \sqrt{1+1+3} = \sqrt{5}$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{1}{3}\pi$

$z = 1$

$\left(\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\pi, z\right)$

ej1: Discutir el gráfico de la superficie de ecuación

$$9y^2 - 36z^2 + 4x = 0$$

ej2: Hallar la ecuación de la superficie cónica de vértice en el punto $(3,-2,1)$ y la directriz establecido por la intersección de las superficies de ecuación:

$$S_1 : r^2(2\,\text{sen}^2\phi - 1) = 1 \quad \text{"esférica"}$$

$$S_2 : \cos\phi + (\cos\theta - \text{sen}\theta)\,\text{sen}\,\phi = 0$$

Recomendación: Hallar la ecuación de la superficie cónica generica V y D: esto se encuentra en coordenada cilíndrica y esférica, entonces debemos transformarlo a coordenadas cartesianas.

Sol 2.

Como sabemos que para coordenadas esféricas su transformación a cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\,\text{sen}\phi \\ y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi \\ z = r\cos\phi \\ r^2 = x^2+y^2+z^2 \end{cases}$$

Para S_1:

$$2r^2\,\text{sen}^2\phi - r^2 = 1$$
$$2r^2(1-\cos^2\phi) - r^2 = 1$$
$$r^2 - 2r^2\cos^2\phi = 1$$
$$r^2 - 2(r\cos\phi)^2 = 1 \text{ , pues } z = r\cos\phi$$
$$r^2 - 2z^2 = 1 \text{ , pues } r^2 = x^2+y^2+z^2$$
$$\downarrow$$
$$x^2+y^2+z^2-2z^2 = 1$$
$$x^2+y^2-z^2 = 1 \text{ ; } S_1 \text{ en coordenadas cartesianas}$$

Para S_2:

$$\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\phi - \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi = 0$$

$\times r \longrightarrow$ $r\cos\phi + r\cos\theta\,\text{sen}\phi - r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi = 0$

$$z + x - y = 0 \text{ , pero coordenadas cartesianas}$$

$z + x - y = 0$: S_2 en coordenadas cartesianas

Luego la directriz de la curva es:

$$D = S_1 \cap S_2$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 = 1 \\ z+x-y = 0 \end{cases} \downarrow$$

$$\Rightarrow z = y-x \quad \text{en } x^2+y^2-(y-x)^2 = 1$$

$$\text{en } x^2+y^2-y^2-x^2+2xy = 1$$

$$D : 2xy = 1$$

$$\vdots$$

$$x = \frac{1}{2y}$$

PRACTICA # 02 ANALISIS MATEMÁTICO III

1. Discutir y graficar las siguientes ecuaciones de superficie.

   a. $9x^2 + 4y^2 - 12z = 0$
   b. $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$
   c. $9x^2 + 4y^2 + 12z = 0$
   d. $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$
   e. $3x^2 + 6y^2 - 2z = 6$
   f. $z = \ln(x + y^2)$
   g. $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 1$
   h. $z = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 9$
   i. $36z^2 - 9y^2 + 4x = 0$
   j. $x^2 - z^2 + y = 4$

2. Discutir el gráfico de la ecuación:

   $$r^2 sen^2\varphi - 2r^2 cos^2\varphi - 3r^2 sen^2\vartheta sen^2\varphi + 2r cos\vartheta sen\varphi = 1$$

   Y determinar la ecuación de la superficie cilíndrica de directriz la sección plana x=3; generatriz paralela a (2,-1,-2)

3. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la curva de la ecuación $z^2 + 2z - 3x + 6 = 0$ y la generatriz es la recta paralela a la intersección de los planos $2x + y - z + 5 = 0$, $x - y + z + 4 = 0$

4. Discutir y graficar las ecuaciones

   a. $12r^2 cos^2\vartheta - 6r^2 sen^2\vartheta - 4z = 0$
   b. $2r^2 sen^2\varphi - 3r^2 sen^2\vartheta sen^2\varphi - r^2 cos^2\varphi - 2r cos\varphi = 5$

5. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz se encuentra en el plano XZ y tiene por ecuación $r^2 - 3r sen\vartheta - 4r cos\vartheta - 8 = 0$, la generatriz es una recta paralela a la intersección de los planos de ecuación : $x - y + z - 9 = 0.1\ 2x + 5y - 2z + \sqrt{5} = 0$

6. Transformar:

   a. $3x^2 - 1.\hat{3}y^2 + 0.6z + 2 = 0$ a coordenadas esféricas y cilíndricas.
   b. $r^2 + 2r cos\vartheta - 2r sen\vartheta + z^2 - 3z = 0$ a otros dos sistemas de coordenados.
   c. $(3, 30^0, 5); (2.5, \pi/2, 45^0)$ y $(2,1,3)$ a otros dos sistemas.

7. Discutir el grafico en coordenadas rectangulares de la:

   $$rsen^2\vartheta sen\varphi - cos\vartheta) rsen\varphi - r cos^2\varphi = 0$$

8. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica de directriz es al plano YZ cuya ecuación $r^2 + 2r(sen^2\vartheta - 9cos^2\vartheta) + 4(3cos\vartheta + sen\vartheta) = 0$, la generatriz es paralela a la normal del plano de Ec. $rsen\varphi(sen2\vartheta - 1) - (4r cos\varphi - 6)(cos\vartheta - sen\vartheta) = 0$

9. Hallar la ecuación de la superficie cônica cuya directriz es la sección plana: $r cos\varphi(r cos\varphi - 2) + 3r cos\vartheta sen\varphi + 7 = 0, y = 6$ y el vértice el punto $(\sqrt{14}, arctg3, arccos\frac{\sqrt{14}}{7})$

10. Discutir el grafico de la ecuación $36x^2 - 9y^2 = 4z^2$

09 Viernes → Práctica

11. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es $4y^2 + 9z^2 = 36$ y su generatriz es paralela a la recta $L: \{(-1,-2,5) + r(-1,-2,3)/ \quad r \in R\}$
12. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es $4y^2 + 9z^2 = 36$ y su generatriz es paralela a la recta $L: \{(1,0,0) + r(4,1,2)/ \quad r \in R\}$
13. Discutir el grafico:
    a. En coordenadas rectangulares de: $2z = lnr^2 + \ln(r^2cos^4\vartheta + 2rcos^2\vartheta sen\vartheta + sen^2\vartheta)$
    b. $2y^2 - 4z^2 - 5x = 0$
14. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica en coordenadas esféricas, cuya directriz tiene por ecuación $z = 2lny$, la generatriz es paralela a la normal de, plano de Ec. $rsen\varphi(sen2\vartheta - 1) + (3rcos\vartheta - 4)(cos\vartheta - sen\vartheta) = 0$
15. Hallar la ecuación de la superficie cónica en coordenadas cilíndricas cuya directriz es la sección plana: $rcos\varphi(rcos\varphi - 2) - 4rcos\vartheta sen\varphi + 6 = 0$, $y = 4$ al vértice, el punto $\left(2\sqrt{3}, \pi/4 , \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
16. Discutir el grafico de las ecuaciones:
    a. $4y^2 - 9z^2 - 36x = 0$
    b. $2x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 2 = 0$
17. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz está en el plano XZ y tiene por ecuación $r^2 + 2r(sen\theta + 2\cos\theta) + 4 = 0$ y la generatriz es paralela a la intersección de los planos de ecuación $2x-2y+z+6=0$, $x+3y+4z+6=0$
18. Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la curva de ecuación $x^2 + 2x - 3z + 7 = 0$, $y = -3$; *y su vértice es el punto* $(2,3,1)$
19. Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la curva de ecuación $z^2 + 2z - 3x + 7 = 0$, $y = -3$; *y su vértice es el punto* $(1,3,2)$
20. Discutir la gráfica de la superficie de ecuación $2rsen\varphi sen\vartheta = \ln(r^4sen^4\varphi cos^4\vartheta - 2r^3sen^2\varphi cos\varphi cos^2\varphi + r^2cos^2\varphi)$
21. Hallar los valores de "m" para los cuales la intersección del plano x+my-2=0 con el paraboloide elíptico $3x^2 + 2z^2 = 6y$, *sea*: a) una **elipse**, b) una **parábola**.
22. Hallar la ecuación del cono cuyo vértice está en el punto (3,-1,-2) si las ecuaciones de la directriz son: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; $x - y + z = 0$
23. Hallar la ecuación de la superficie cónica, cuya directriz es la curva E: x=cost, y = 1+sent, z=2+sent ; cuyo vértice es el punto (1,1,-2)
24. Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la intersección de las superficies de Ec. $3x^2 - y + 3z^2 = 1$ y $2x + 3y - z = 0$; y cuya generatriz son paralelos a la recta: $L = \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{2}$

Alumno : AQUINO PORTOCARRERO, JHAIR JHAMION , Código : 18160250
EAP Ingeniería metalúrgica 2019-I
Docente : León BARBOZA, Félix

Ejercicio 1

Discutir la gráfica de la superficie de ecuación : $2\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\cos^2\varphi(5 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 6\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + 3$

Sol 1:

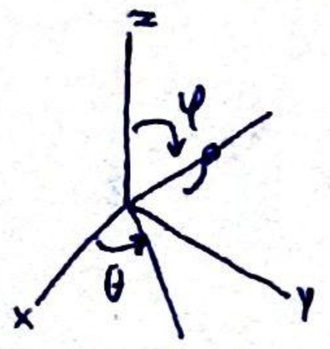
Sea la ecuación de superficie: $2\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta - 5\rho^2\cos^2\varphi = 6\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + 3$

$2\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}^2\theta - 5\rho^2\cos^2\varphi = 6\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + 3$

$2\rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) - 2(\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)^2 - 5(\rho\cos\varphi)^2 = 6(\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi) + 3$ — ①

De las transformación T y su inversa T^{-1}:

$T : (x,y,z) \longrightarrow (\rho,\theta,\varphi)$



$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y &= \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho\cos\varphi \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\}$$ — ②

Realizando el cambio de coordenadas esféricas a cartesianas (② en ①):

$2(x^2+y^2+z^2)(1) - 2(y)^2 - 5(z)^2 = 6(y) + 3$

$2x^2 - 3z^2 = 6y + 3$ — ③

De la ecuación de superficie ③ se espera que sea un paraboloide hiperbólico, veamos la discusión de gráfica:

a. Intersección con ejes coordenados

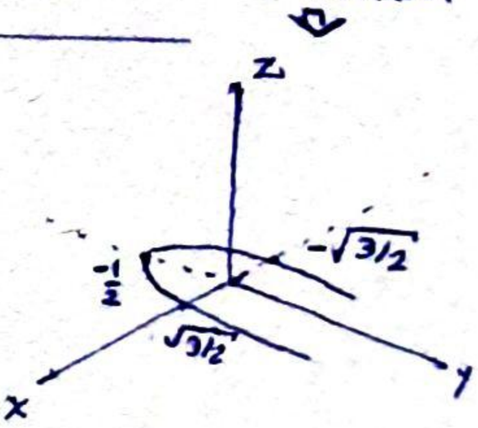
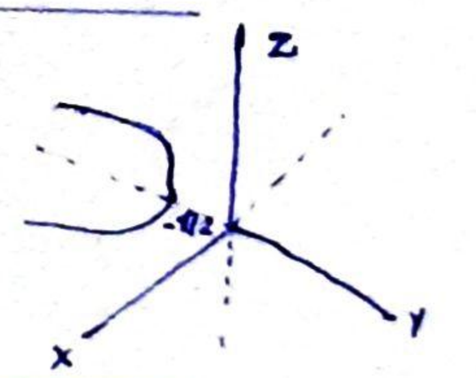
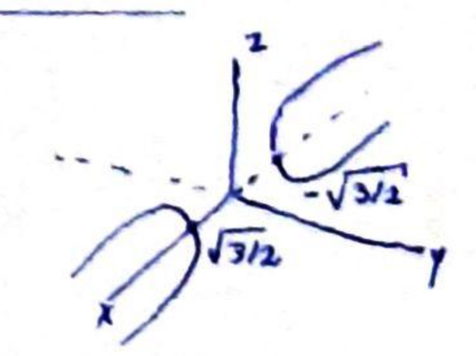
valores (x,y,z)

c/eje x : $(x,0,0)$ ⇨ $2x^2 = 3$ ⇨ Intersección en $x = \pm\sqrt{3/2}$

c/eje y : $(0,y,0)$ ⇨ $6y = -3$ ⇨ Intersección en $y = -1/2$

c/eje z : $(0,0,z)$ ⇨ $-3z^2 = 3$ ⇨ No ∄ con z

b. Trazas y planos paralelos a planos coordenados

Plano	valores (x,y,z)	Traza	Planos paralelos	
$xy\square$	$(x,y,0)$	$2x^2 = 6y + 3$ $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2} = y$	$2x^2 - 3k^2 = 6y + 3$ $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2} - \frac{k^2}{2} = y$	
$yz\square$	$(0,y,z)$	$-3z^2 = 6y + 3$ $-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2} = y$	$2k^2 - 3z^2 = 6y + 3$ $-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2} + \frac{k^2}{3} = y$	
$xz\square$	$(x,0,z)$	$2x^2 - 3z^2 = 3$ $\frac{x^2}{\sqrt{\frac{3}{2}}^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$	$2x^2 - 3z^2 = 6k + 3$ $\frac{x^2}{\sqrt{\frac{3}{2}}^2} - \frac{z^2}{1^2} = (k+2)$	

c. Simetría

Eje	valores (x,y,z)	Plano	valores (x,y,z)	Origen valores (x,y,z)
x	$(x,y,z) \neq (x,-y,-z)$	xy□	$(x,y,z) = (x,y,-z)$	$(x,y,z) \neq (-x,-y,-z)$
y	$(-x,-y,-z) = (x,y,z)$	yz□	$(x,y,z) = (-x,y,z)$	
z	$(-x,-y,z) \neq (x,y,z)$	xz□	$(x,y,z) \neq (x,-y,z)$	

∴ ∃ simetría con eje y, plano xy, yz.

d. Extensión de la superficie

Sea $2x^2 - 3z^2 = 6y + 3$

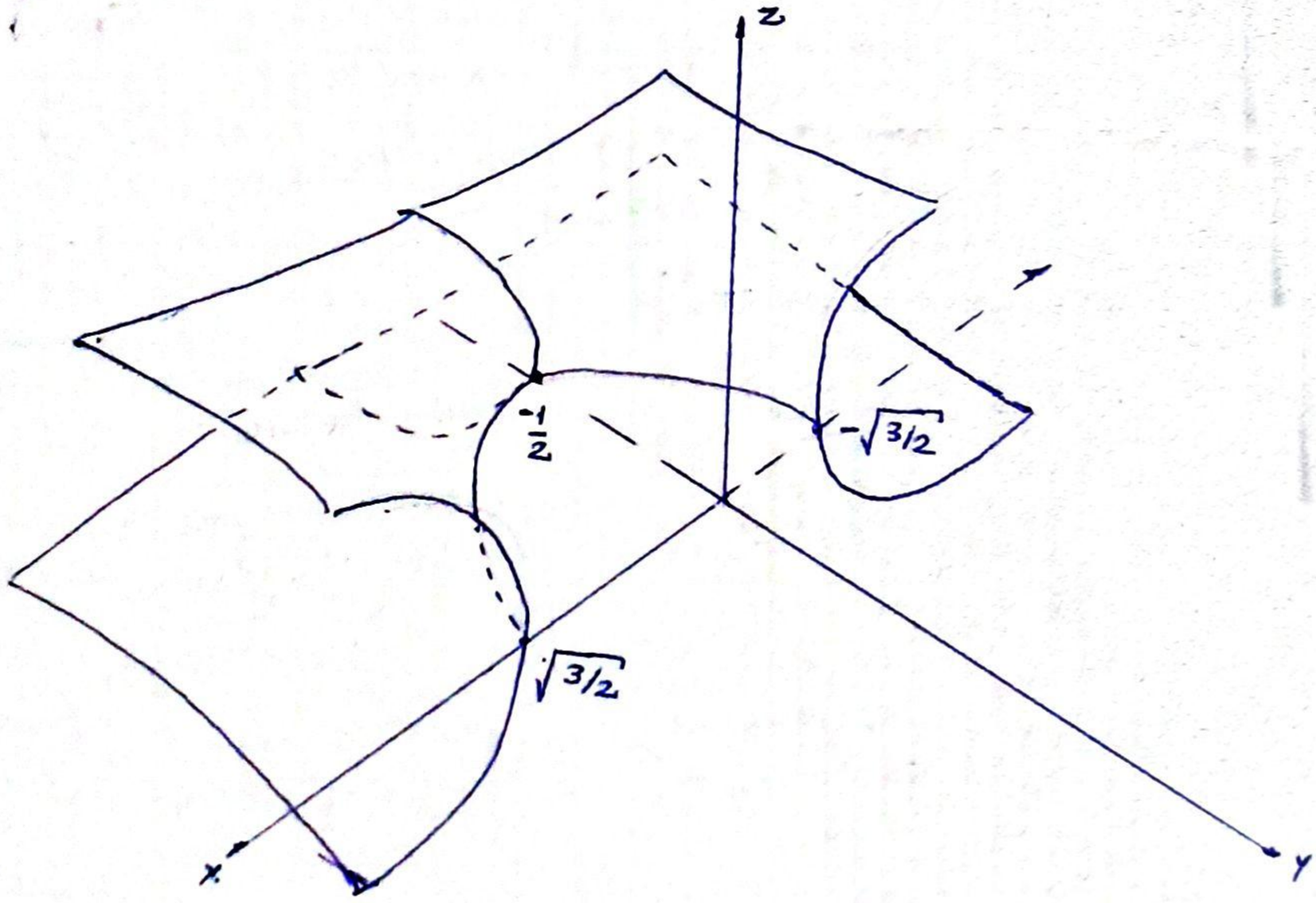
$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3z^2+6y+3)}$, $\frac{1}{2}(3z^2+6y+3) \geq 0 \hookrightarrow y \geq -\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}$

$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow y = \frac{1}{6}(2x^2 - 3z^2 - 3)$, $2x^2 - 3z^2 - 3 \geq 0 \vee 2x^2 - 3z^2 - 3 \leq 0$

$z \in \mathbb{R} \leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(2x^2 - 6y - 3)}$, $\frac{1}{3}(2x^2 - 6y - 3) \geq 0 \hookrightarrow y \geq \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}$

e. Grafo:

∴ de acuerdo a (a) (b), (c) y (d) se tiene:



Ejercicio 2:

Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la sección plana:

$$\begin{cases} 2\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi - 3\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2(3\operatorname{sen}^2\theta + 2)\cos^2\varphi - 2\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

y la generatriz es ORTOGONAL al plano que contiene A los puntos $(1,2,3), (2,-1,3), (-1,1,2)$.

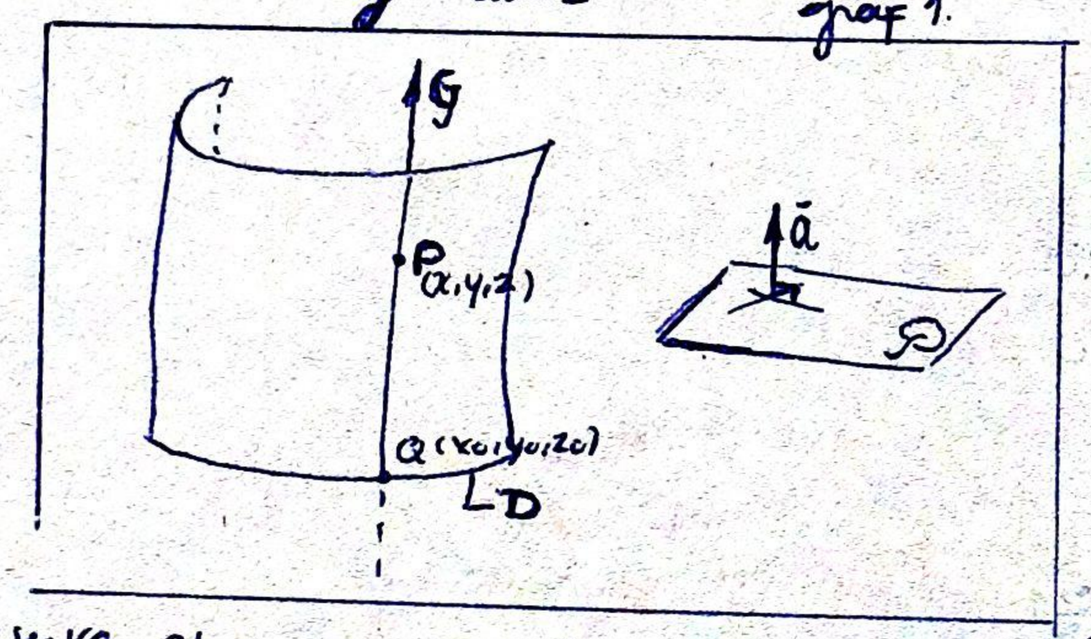
Bosquejar gráfico

Sol 2.

Para hallar la ecuación de la superficie cilíndrica se necesita la ecuación de la generatriz y la ecuación de la directriz.

→ Hallando la ecuación de generatriz

graf 1.



Se observa el vecto dirección dirección del plano ℘ (este es ortogonal) y paralelo a la generatriz (G) de la superficie cilíndrica, entonces se cumplirá:

$$G: \overline{QP} \parallel \vec{a} \leftrightarrow P = Q + \lambda\vec{a}, \lambda \in R \quad -(1)$$

Los puntos que pertenezcan al plano cumplirán la ecuación del plano ℘:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (1,2,3) \in \wp \leftrightarrow A + 2B + 3C + D = 0 \\ (2,-1,3) \in \wp \leftrightarrow 2A - B + 3C + D = 0 \\ (-1,1,2) \in \wp \leftrightarrow -A + B + 2C + D = 0 \end{array}\right\}$$

Despejando A, B, C en función de la constante D:

$$A = \frac{3}{16}D \;,\; B = \frac{1}{16}D \;,\; C = \frac{-7}{16}D$$

Se tiene la ecuación del plano ℘:

$$\frac{3}{16}Dx + \frac{1}{16}Dy + \frac{-7}{16}Dz + D = 0$$

↳ su vector dirección del plano ℘ es: $\bar{N_1} = \vec{a} = \left(\frac{3}{16}D, \frac{1}{16}D, \frac{-7}{16}D\right)$ — (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$G: P = Q + \lambda\left(\frac{3}{16}D, \frac{1}{16}D, \frac{-7}{16}D\right)$$, al ser $\frac{D}{16}$ una constante $\in R$, quedará:

ecuación de la generatriz $P = Q + \lambda_1(3,1,-7) \;,\; \lambda_1 \in R$

↳ ecuación simétrica de la generatriz $\Rightarrow G: \left\{ \frac{x - x_0}{3} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{-7} \right\}$ — (3)

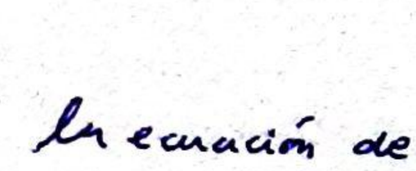
→ Hallando ecuación de directriz

$$\begin{cases} 2\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi - 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta + 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + 2\rho^2\cos^2\varphi - 2\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - 3 = 0 \\ y = 6 \end{cases}$$

Transformando la ecuación de directriz a coordenadas cartesianas:

$$2\rho^2(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) - 3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta + 3\rho^2\operatorname{sen}\theta - 3(\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)^2 - 2\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - 3 = 0$$

$$2\rho^2 - 3(\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)^2 - 2(\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta) - 3 = 0$$



Sea la transformación T:

$$T: (x,y,z) \longrightarrow (\rho,\theta,\varphi)$$

$$\begin{cases} x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

Reemplazando:

$$2(x^2+y^2+z^2) - 3y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$2x^2 - y^2 - 2y + 2z^2 - 3 = 0 \quad -(\alpha)$$

Además $y = 6$, en (α) se tiene: → PORQUE NO DEBE HABER NINGÚN TÉRMINO "y" en LA ECUACIÓN DE DIRECTRIZ

$$2x^2 - 36 - 2(6) + 2z^2 - 3 = 0$$

$$2x^2 + 2z^2 = 51$$

La ecuación de la directriz queda definida:

$$D: \begin{cases} 2x^2 + 2z^2 = 51 \\ y = 6 \end{cases} \quad -(4)$$

- De la graf 1 se observa:

$$Q(x_0,y_0,z_0) \in D \longrightarrow D: \begin{cases} 2x_0^2 + 2z_0^2 = 51 \quad -(5) \\ y_0 = 6 \quad -(6) \end{cases}$$

Reemplazando (6) en (3)

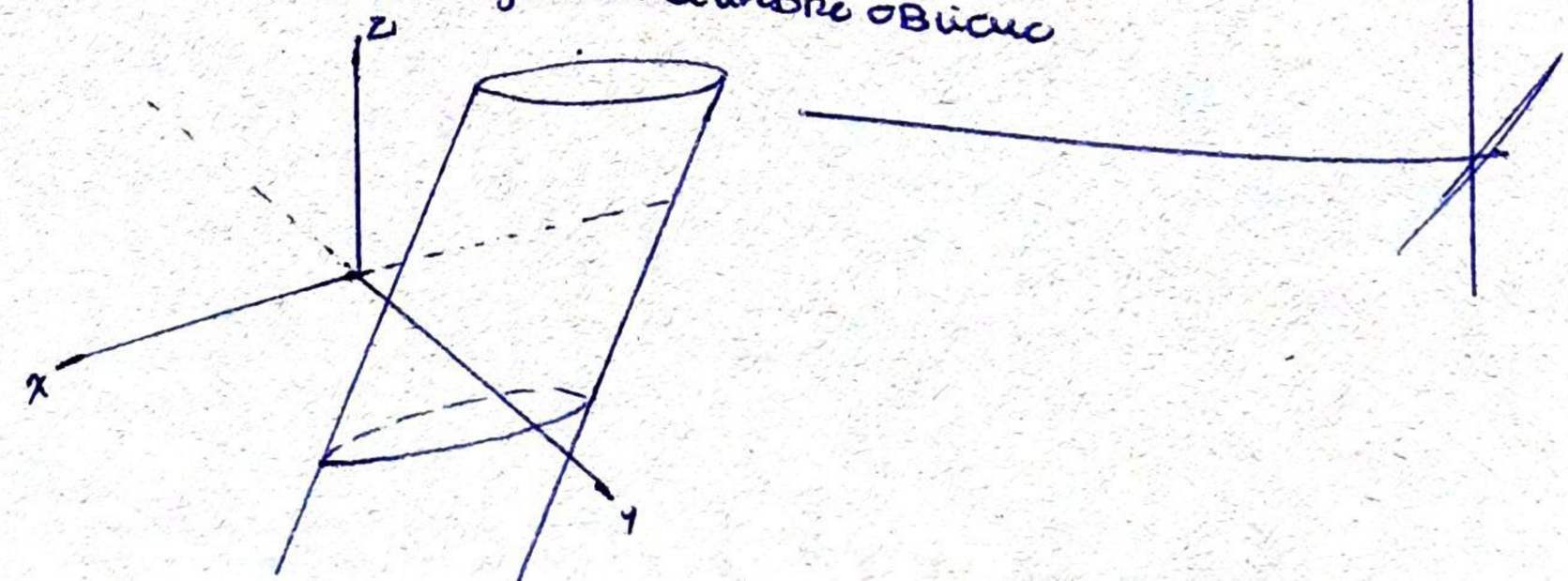
$$G: \left\{ \frac{x - x_0}{3} = \frac{y - 6}{1} = \frac{z - z_0}{-7} \right\}$$

Despejando x_0, z_0: $x_0 = x - 3(y-6)$, $z_0 = z + 7(y-6)$. Estos valores reemplazando en (5)

$$\longrightarrow 2(x - 3(y-6))^2 + 2(z + 7(y-6))^2 = 51$$

$$x^2 + 40y^2 + z^2 - 6xy + 14zy + 36x - 84z - 276y + \frac{20625}{10} = 0$$, es la ecuación de la superficie cilíndrica, se observa un cilindro oblicuo

Bosquejo:



Ejercicio 3

Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es:

$$\begin{cases} r^2 + r^2(2\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos^2\theta) + 12r\cos\theta + 6r\operatorname{sen}\theta = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

y el vértice el punto $\left(2\sqrt{3}, -\pi/4, \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

Sol ③

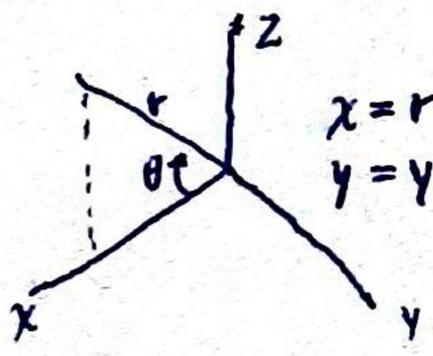
Para hallar la ecuación de la superficie cónica se necesita la directriz y el vértice.

→ Hallando la ecuación de la directriz

Sea $r^2 + 2r^2\operatorname{sen}^2\theta + 5r^2\cos^2\theta + 12r\cos\theta + 6r\operatorname{sen}\theta = 0$

$$r^2 + 2(r\operatorname{sen}\theta)^2 + 5(r\cos\theta)^2 + 12r\cos\theta + 6r\operatorname{sen}\theta = 0$$

→ Dado que como $y = 2$ entonces la transformación de las coordenadas cilíndricas es en plano XZ:



$x = r\cos\theta \quad z = r\operatorname{sen}\theta \rightarrow r = \sqrt{x^2+z^2}$

$y = y$

$r \in$ plano XZ:

Usando la ecuación

$$(x^2+z^2) + 2z^2 + 5x^2 + 12x + 6z = 0$$

$$6x^2 + 12x + 3z^2 + 6z = 0$$

∴ la ecuación de directriz es: $\begin{cases} 2x^2 + 4x + z^2 + 2z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ — ①

→ Hallando el vértice que se encuentra en coordenadas esféricas

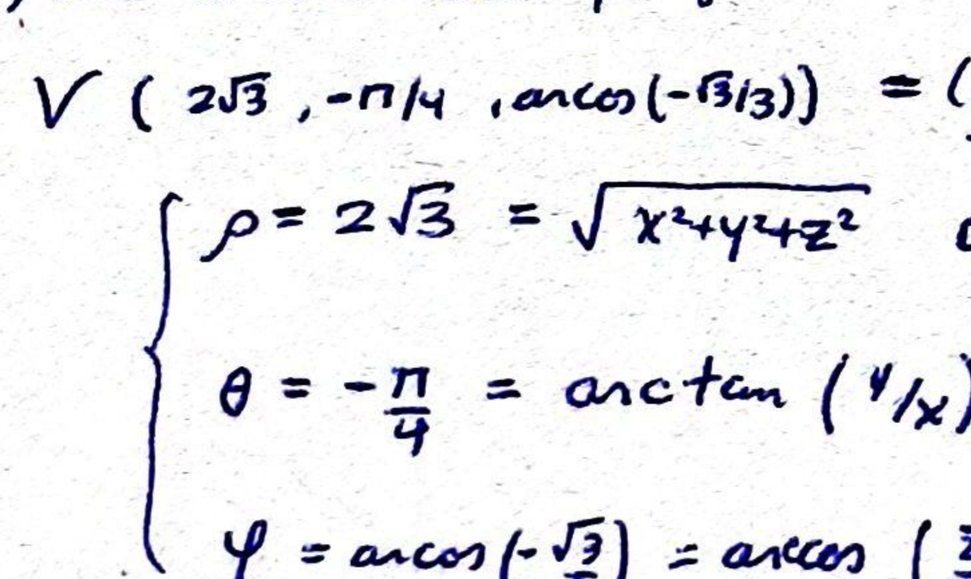
$$V\left(2\sqrt{3}, -\pi/4, \arccos(-\sqrt{3}/3)\right) = (\rho, \theta, \varphi)$$

$$\begin{cases} \rho = 2\sqrt{3} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow 12 = 2x^2 + 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{4} = \arctan(y/x) \rightarrow y/x = \tan(-\pi/4) \Rightarrow y = -x \\ \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{z}{2\sqrt{3}} \Rightarrow z = -2 \end{cases}$$

el vértice se toma $V(\pm 2, \mp 2, -2)$

Es el vértice que cumple con las posteriores ecuaciones $V(2, -2, -2)$ — ②

Teniendo en cuenta la gráfica 1:



Evaluando para P y $y = -2$ y el plano que contiene a la Directriz $\Rightarrow y = 2$

La ecuación de la generatriz principal es:

$$G:\left\{\frac{x-2}{x_0-2}=\frac{y+2}{y_0+2}=\frac{z+2}{z_0+2}\right\}-(3)$$

Se asegura que $Q(x_0;y_0;z_0)\in D \rightarrow D:\begin{cases}2x_0^2+4x_0+z_0^2+2z_0=0 & -(4)\\ y_0=2 & -(5)\end{cases}$

→ Reemplazando (5) en (3)

$$G:\left\{\frac{x-2}{x_0-2}=\frac{y+2}{z+2}=\frac{z+2}{z_0+2}\right\}$$

Despejando x_0, z_0 : $x_0=2+\frac{4(x-2)}{y+2}$, $z_0=-2+\frac{4(z+2)}{y+2}$

Reemplazo los valores hallados en (4)

$$2\left(2+\frac{4(x-2)}{y+2}\right)^2+4\left(2+\frac{(4(x-2)}{y+2}\right)+\left(-2+4\frac{(z+2)}{y+2}\right)^2+2\left(-2+\frac{4(z+2)}{y+2}\right)=0$$

$$\therefore\quad 2\left(\frac{4x+2y-4}{y+2}\right)^2+4\left(\frac{4x+2y-4}{y+2}\right)+\left(\frac{4z-2y+4}{y+2}\right)^2+2\left(\frac{4z-2y+4}{y+2}\right)=0$$

es la ecuación de la superficie cónica

25 Abril 2019 . Jueves . Cálculo III

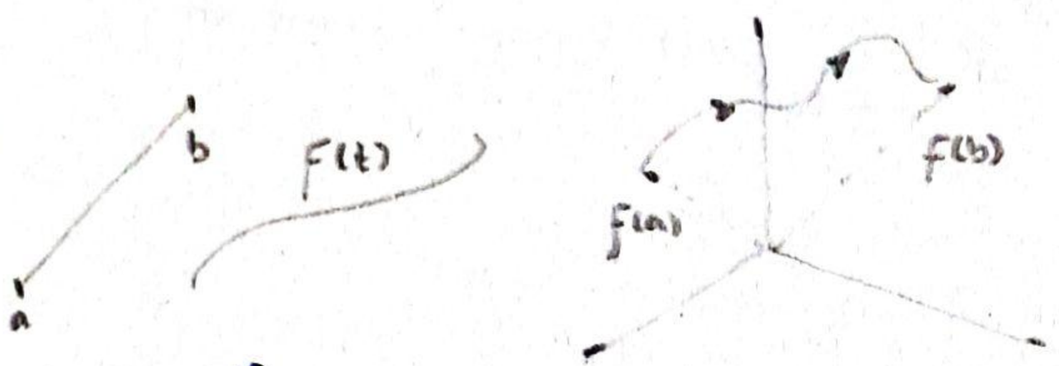
Tema: Funciones vectoriales de una variable real
(o curvas en el espacio)

Def: $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longrightarrow \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

Donde: t — conjunto de $\mathbb{R}$ números; $\vec{f}(t)$ — conjunto de vectores o puntos de $\mathbb{R}^n$

$f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, en ese caso $\vec{f}$ recibe el nombre de función vectorial de variable real
(la variable t es una variable real)



El dominio de $\vec{f}$ es denotado por D_f es $[a,b]$ (es decir el conjunto de $\mathbb{R}$)

El Rango de $\vec{f}$ es el conjunto $R_f = \{ \vec{f}(t) / t \in [a,b] \}$ (es decir un conjunto de vectores o puntos de $\mathbb{R}^n$)

El grafo de $\vec{f}$ ES el conjunto $G_{\vec{f}} = \{(t, f) \in \mathbb{R}^{n+1} / t \in [a,b]\}$

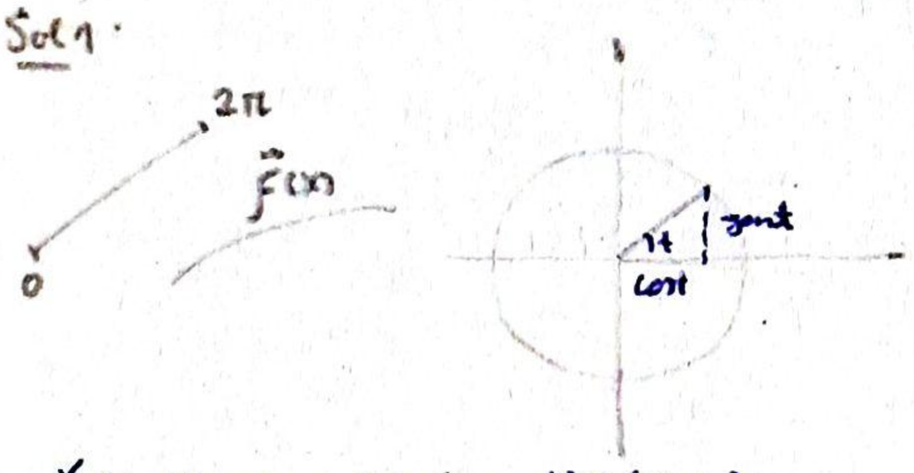
Ej1:

$f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow \vec{f}(x) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

Determine el D_f

Sol1:



✓ Haciendo: $(\cos t, \operatorname{sen} t) = (x, y)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Ecuación paramétrica

✓ $x^2 = \cos^2 t$, $y^2 = \operatorname{sen}^2 t$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$R_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

Para una función $\mathbb{R}^2$

Ej2:

$G_{\vec{f}} = \{ (t, f(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} / t \in [0, 2\pi] \}$

$= \{ (f(t), t) \text{ " } \text{ " } \}$

$= \{ (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \in \mathbb{R}^3 / t \in [0, 2\pi] \}$

La grafica de 2:

$G_{\vec{f}} = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Ej3:

Si $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ya no es posible visualizar

OBS:

$f_i \ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Ejm4:

DESCRIBIR el Rango de la función:

$$\vec{f}(t) = \left(\int \frac{\alpha}{2}(e^t - e^{-t})\,dt \ , \int \frac{\beta}{2}(e^t + e^{-t})\,dt \right)$$

$\alpha, \beta > 0$

SOL:

1) Lo anterior es una función vectorial, determinada en variables x e y $\left[\text{sea } \vec{F}(t) = (x,y) = (\int \alpha \dots, \int \beta \dots)\right]$

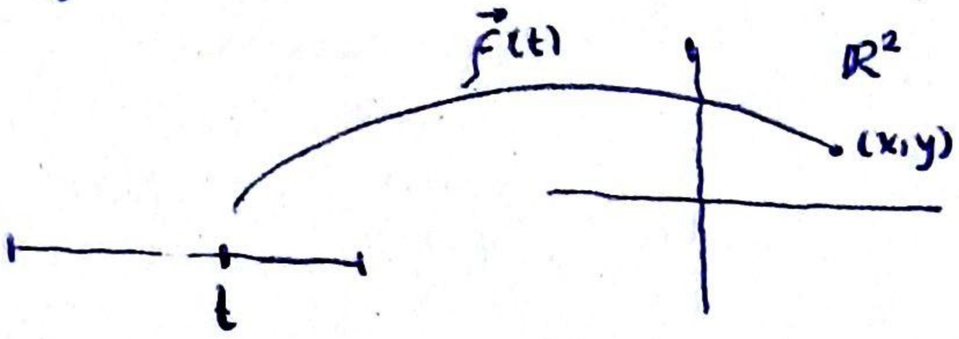
2) Ordeno la función vectorial,
se tiene que hay funciones hiperbólicas
$\operatorname{senh} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$$\vec{f}(t) = \left(\int \alpha \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) dt \ , \int \beta \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) dt \right)$$

$$\vec{f}(t) = \left(\int \alpha \operatorname{senh} t\,dt \ , \int \beta \cosh t\,dt \right)$$

$\vec{f}(t) = (\alpha \cosh t \ , \beta \operatorname{senh} t)$

Porque $\int \operatorname{senh} t\,dt = \cosh t$



Cada función vectorial se relaciona con una cartesiana y esto

$\vec{f}(t) = (x,y) = (\alpha\cos ht, \beta \operatorname{sen} ht)$

$\begin{cases} x = \alpha\cos ht \rightsquigarrow x^2 = \alpha^2\cos^2 ht \\ y = \beta \operatorname{sen} ht \rightsquigarrow y^2 = \beta^2 \operatorname{sen}^2 ht \end{cases}$

NOTA: De función vectorial podemos pasarlo a una función cartesiana, esto se hace para graficar.

a) $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 = \cos^2 ht$

a partir de funciones conocidas

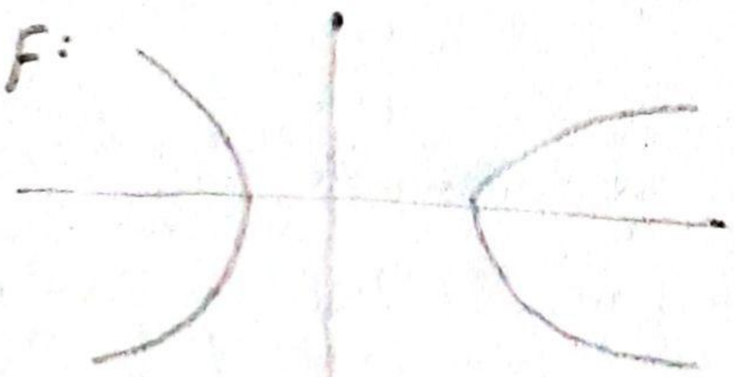
$\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 ht$

$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = \cos^2 ht - \operatorname{sen}^2 ht$

$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad , \cos^2 ht - \operatorname{sen}^2 ht = 1$

$R_F: \left\{ (x,y) \;/\; \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \right\}$

graf F:



El anterior caso es una función vectorial, para una función vectorial hemos bajado a $\mathbb{R}^2$ para poder visualizar de manera gráfica. De esa manera bajamos de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ para poder visualizar la gráfica

Para ello debemos repasar regla "Hospital 1°, 2°, 3°

Def: Sea $\vec{f}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longrightarrow \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$

límite

$\vec{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ Es un vector en $\mathbb{R}^n$

Diremos que el límite de $\vec{f}(t)$ cuando t es $\vec{C}$, $t \to t_0$

es decir:

$\lim_{t \to t_0} \vec{f}_i(t) = c_i \quad , i = 1,2,\ldots,n$

vemos

En este caso denotamos:

$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{C}$

En otras palabras:

$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} \vec{f}_1(t) \;, \ldots, \lim_{t \to t_0} \vec{f}_n(t) \right)$

Se aplica a cada uno

Si $\exists \lim_{t \to t_0} f_i(t)$, en caso contrario NO $\exists$

el límite $\exists$ si aplica para cada uno, si el límite $\nexists$ para al menos uno ya no existe el límite

ejm:

Hallar $\lim_{t \to 0} \underbrace{\left(2t+1 \;,\; t\sqrt{\frac{1}{4t^2}+1}\right)}_{\vec{f}(t)}$

Sol

$= \left(\lim_{t \to 0} (2t+1) \;,\; \lim_{t \to 0} t\sqrt{\frac{1}{4t^2}+1} \right)$

$= \left(1 \;,\; \lim_{t \to 0} t\frac{\sqrt{1+4t^2}}{\sqrt{4t^2}} \right)$

$= \left(1 \;,\; \lim_{t \to 0} t\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2|t|} \right)$

Obs:

$\lim_{t \to 0} t\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t} = \frac{1}{2}, \; t > 0$

$\lim_{t \to 0} t\frac{\sqrt{1+4t^2}}{-2t} = -\frac{1}{2}, \; t < 0$

$\therefore \nexists \lim_{t \to 0} \vec{f}(t)$

Propiedades:

Sea $\vec{f}, \vec{g} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Tales que

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) \quad \text{y} \quad \lim_{t \to t_0} \vec{g}(t)$$, se verifica:

1) $\lim_{t \to t_0} (\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)) = \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) \pm \lim_{t \to t_0} \vec{g}(t)$

2) $\lim_{t \to t_0} \gamma \vec{f}(t) = \gamma \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t)$

3) $\lim_{t \to t_0} \vec{C} = \vec{C}$, $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$ vector

4) $\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \vec{g}(t)$

5) en $\mathbb{R}^3$

$$\lim_{t \to t_0} (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)) = \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) \times \lim_{t \to t_0} \vec{g}(t)$$

Def: CONTINUIDAD

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longrightarrow \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

y $t_0 \in [a,b]$ diremos que

i) $\vec{f}$ ES CONTINUA en t_0 si f_i SON CONTINUAS en $t = t_0$. ESTO EQUIVALE A DECIR:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$$

Def: DERIVABILIDAD

ii) $\vec{f}$ ES DERIVABLE EN t_0, si f_i es DERIVABLE en $t = t_0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$

EN ESTE CASO DECIMOS LA DERIVABILIDAD $\vec{f}(t)$ como $\vec{f}'(t_0)$

Sea $\vec{f}(t) = (\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \dots \vec{f}_n(t))$

$\vec{f}'(t_0) = (\vec{f}_1'(t_0), \vec{f}_2'(t_0), \dots \vec{f}_n'(t_0))$

Ejemplo 1:

Sea $f(t) = \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, 2\right) & , t \neq 0 \\ (1,2) & , t = 0 \end{cases}$

¿Es continua en $t = 0$?

Sol 1:

✓ $\lim_{t \to t_0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, 2\right) = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \lim_{t \to t_0} 2\right)$

$t_0 = 0$

$= (1, 2)$

✓ $\lim_{t \to 0} \vec{f}(t) = f(0) = (1,2)$

∴ $\vec{f}(t)$ es continua en $t = 0$

ahora $\lim_{t \to 0} (1,2) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}, 2\right)$

Ejemplo 2: Halle $f'(0)$ si es suiera

$$\vec{f}(t) = (\underbrace{t^2}_{f_1}, \underbrace{|t|}_{f_2})$$

Sol 2

$f_1'(t) = 2t \longrightarrow f_1'(0) = 0$

$\vec{f}_2'(t) = |t|$ $\begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$

$\frac{|t|}{|t|} = \frac{t}{|t|}$

∴ $\vec{f}(t)$ NO es derivable en $t = 0$

Definimos:

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$t \longrightarrow \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

$\vec{f}$ ES DERIVABLE en $t = t_0 \iff f_i$ es DERIVABLE en $t = t_0$. Se dice que $\vec{f}_{(t)}$ ES DERIVABLE en $[a,b]$, si es DERIVABLE en TODO $t \in [a,b]$, en ESTE CASO la DERIVADA se denota $\vec{f}'(t)$ (De $\vec{f}(t)$)

Y $\vec{f}'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$

$\frac{d|u|}{dx} = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{du}{dx}$

Observación: Si existe límite en cada uno de los componentes entonces $f'(t_0)$ existe

de

$f'(t)$

$$\vec{f}'(t_0) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t_0+h)-f(t_0)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0} \frac{f_n(t_0+h)-f(t_0)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(t_0+h)-f(t_0)}{h}, \dots, \frac{f_n(t_0+h)-f(t_0)}{h} \right)$$

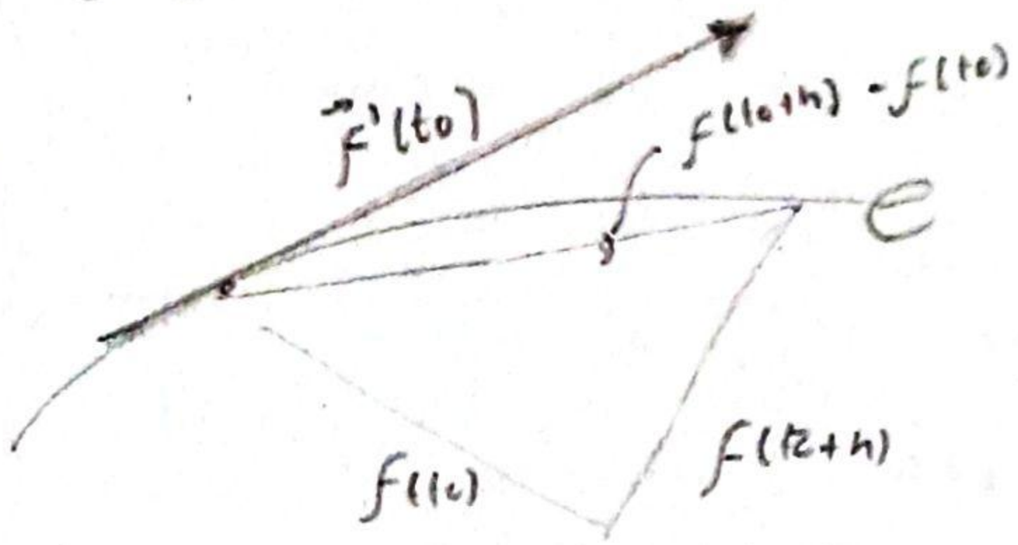
$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$ Si $\exists$ el límite

en cada uno de los componentes

$$\Leftrightarrow \vec{f}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

$\exists$ la derivada en t_0

graf:



1. Recta tangente a la curva (C)

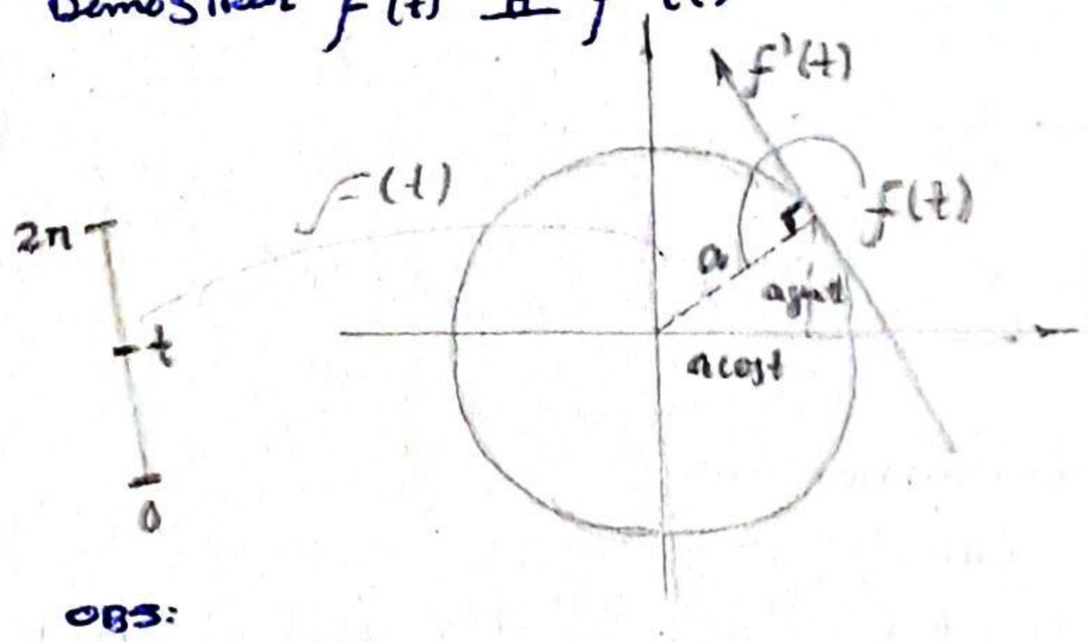
El vector $\vec{f}'(t_0)$ es tangente a la curva C descrita por $\vec{f}$ en el punto $\vec{f}(t_0)$. Así la ecuación de la recta tangente a la curva C en $\vec{f}(t_0)$ es:

$$L_T : \vec{f}(t_0) + \gamma \vec{f}'(t_0), \gamma \in \mathbb{R}$$

Ej: $C : f(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi\rangle$

$\vec{f}(t) : [0, 2\pi\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Demostrar $\vec{f}(t) \perp \vec{f}'(t)$



Obs:

Si $\|f(t)\| = c$, c es constante

$\|f(t)\|^2 = c^2$

$f^2(t) = f(t) \cdot f(t) = c^2$

$(f(t) \cdot f(t))' = (c^2)'$

$f'(t) \cdot f(t) + f(t) \cdot f'(t) = 0$

$2 f'(t) \cdot f(t) = 0$

Como $2 \neq 0 \Rightarrow f'(t) \cdot f(t) = 0$

$\Leftrightarrow f'(t) \perp f(t)$

Propiedades:

Sean $\vec{f}, \vec{g}$ derivables y se verifica que:

1) $(\vec{f} \pm \vec{g})'(t) = \vec{f}'(t) \pm \vec{g}'(t)$

2) $(c \cdot \vec{f}(t))' =$

3) $(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$

4) en $\mathbb{R}^3$

$(\vec{f} \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$

5) $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' =$

6) $(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

- $(\varphi(t) \cdot \vec{f}(t)) = \varphi'(t) \cdot \vec{f}(t) + \varphi(t) \vec{f}'(t)$

$(f(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función real $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \end{cases}$ $\varphi'(t) =$

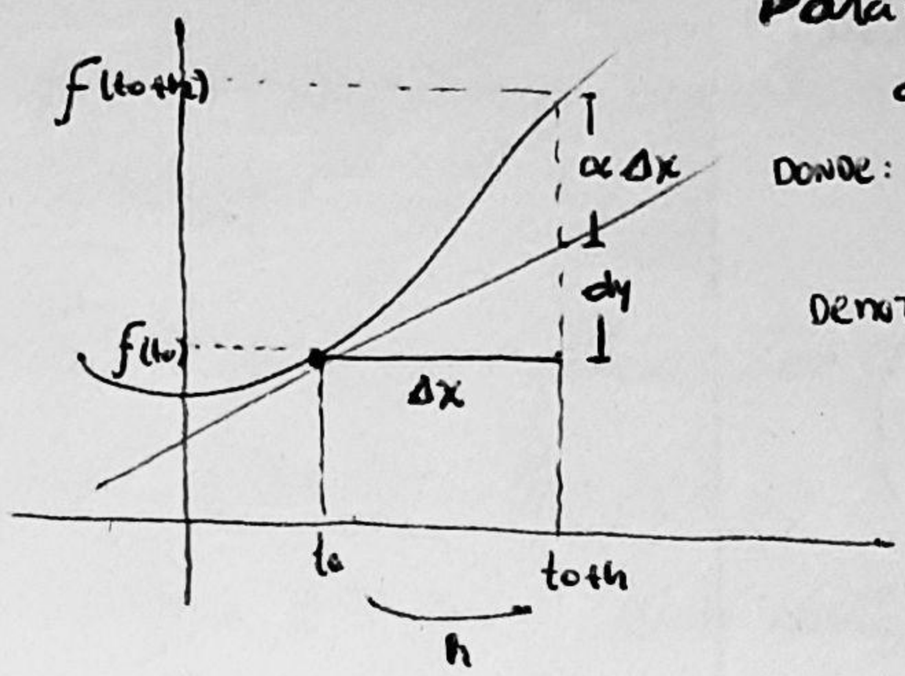
Diferencial

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$dy = f'(x) \cdot dx$

↳ $\Delta y \approx dy$



c) $f(to+h) - f(to) = dy + \alpha \Delta x$, $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha \Delta x = 0$ ó

$$f(to+h) = f(to) + f'(to)\Delta x$$

Propiedad:

1) $d(c) = 0$

2) $d(f \pm g) = df \pm dg$

3) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + dg \cdot f = f\,dg + df \cdot g$

↳ $d(\mu \cdot v) = \mu\, dv + v\, d\mu$

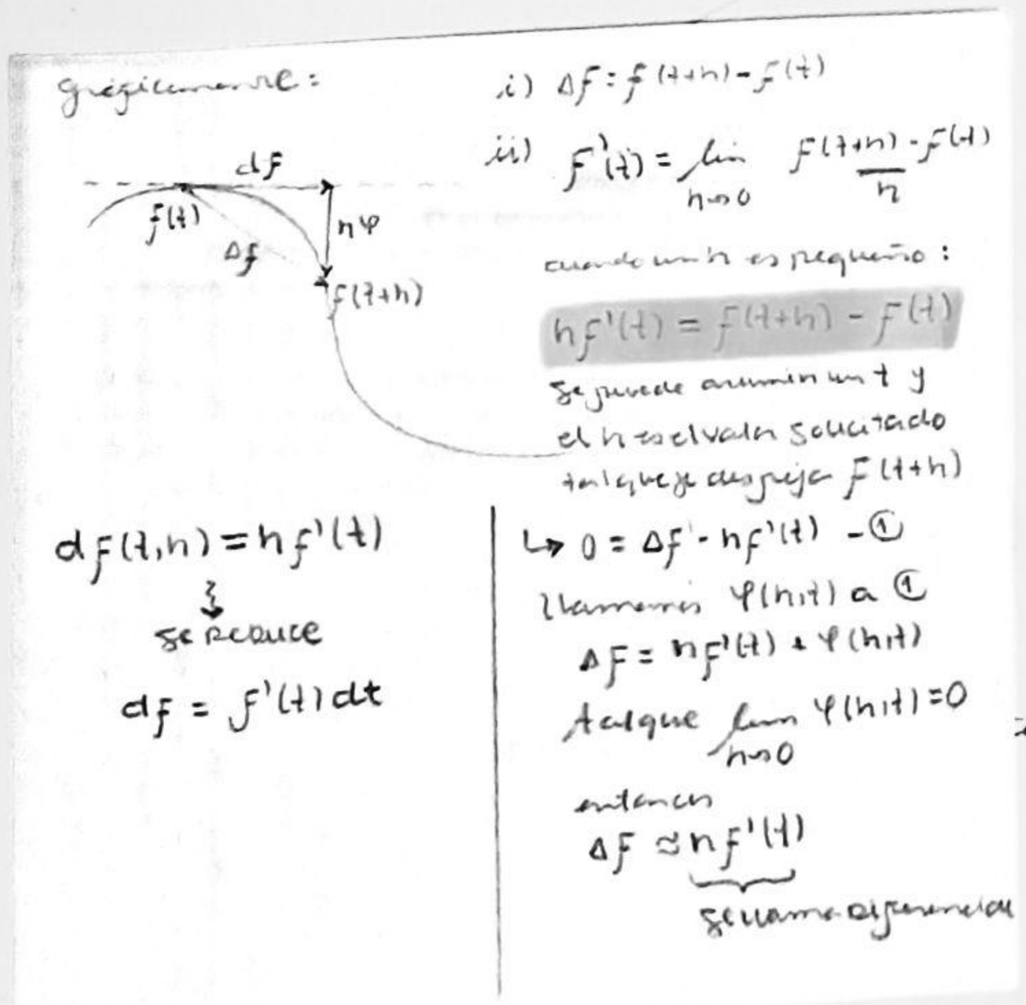
$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

El diferencial de una función $\vec{f}$, es VECTOR diferenciable en $[a;b]$, si to ; $to+h$ son dos puntos en $]=[a;b]$

Se define el incremento de $\vec{f}$ en el punto to correspondiente al incremento h

Se denota:

$$\Delta \vec{f}(to,h) = f(to+h) - f(to)$$



Para el incremento de h. Se denota:

$$d\vec{f}(to,h) = h \cdot f'(to)$$

DONDE: $\lim_{h \to t} \varphi(to,h) = 0$

Denotamos:

$$\boxed{d\vec{f} = f'(to)\, dt}$$

Si $\vec{f} = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

↳ PARA cualquier t en $]=[a;b]$

$$d\vec{f} = (df_1, df_2, df_3, \dots, df_n)$$

Ejemplo?: ? -Vn

POR MEDIO DEL DIFERENCIAL, APROXIMAR CUANDO SE FUERZA POR:

$x = \operatorname{sen} t$, $y = t^3 - 2$, $z = e^{4t}$

en $t = 0.25$

Sol 1:

$$\vec{f}(t) = (\operatorname{sen} t, t^3 - 2, e^{4t}) \quad -(a)$$

$$\vec{f}'(t) = (\cos t, 3t^2, 4e^{4t}) \quad -(b)$$

$$\vec{f}(0.25) = \vec{f}(0 + 0.25) + d\vec{f}(0;0.25)$$

considerando $to = 0$

$d\vec{f} = 0.25$, como $\Delta \vec{f} = d\vec{f}$

y para el incremento h. se denota

$$d\vec{f}(0,h) = h \cdot f'(0)$$

Como $\lim_{h \to 0} \varphi(to,h) = 0$

$$\Delta \vec{f}(to,h) = d\vec{f}(to,h)$$

$$d\vec{f} = f'(to)\, dt$$

↳ $t = 0.25$

$$\vec{f}(0.25) = \vec{f}(0 + 0.25) = \vec{f}(0) + \Delta \vec{f}(0;0.25)$$

$t = 0$, $dt = 0.25$

$$\Delta \vec{f} = d\vec{f} = \vec{f}(0 + 0.25) = \vec{f}(0) + \vec{f}'(0)\, dt$$

$$\vec{f}'(0) = (1,0,4) \quad -(a)$$

Además $\vec{f}(0) = (0,-2,0) \quad -(b)$

Así: $\vec{f}(0.25) = (0,-2,0) + 0.25(1,0,4)$

$$= \vec{f}(0) + dt\, \vec{f}'(0)$$

$$= (0.25, -2, 1)$$

$$\therefore \|\vec{f}(0.25)\| = \sqrt{0.25^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

La integral indefinida de una función vectorial

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \vec{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

se tiene:

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = \left(\int_a^b \vec{F}_1(t)dt, \ldots, \int_a^b \vec{F}_n(t)dt \right)$$

(el mismo caso para la integral definida e indefinida en la Interpretación

Debemos considerar:

1° TFC

Sea $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$
es continua en $I = [a,b]$

$$\Phi \; D_t \int_{to}^{t} f\,d = \vec{F}(t), \; t \in [a,b]$$

2° TFC

Sea $F = (F_1(t), \ldots F_2(t))$
tiene derivadas continuas sobre I

I) $\forall\, a,b \in I$ tenemos

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

Ejercicios de Cálculo Vectorial

① Dada la función vectorial:

$$\vec{f}(t) = \left(\sqrt{1-t^2},\ \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2},\ \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}}\right)$$

a) Determinar el Dominio de $\vec{f}$

b) Hallar $\lim_{t\to 0^+} \vec{f}(t)$ ¿Es posible hallar $\lim_{t\to 0^-} \vec{f}(t)$?

c) ¿Existen puntos de discontinuidad sobre el dominio encontrado en (a)?

d) ¿Es posible redefinir $\vec{f}(t)$ de modo que sea Continua sobre el Intervalo $[0,1]$? Justificar su respuesta en cada caso.

② a) Halle el Dominio y bosqueje la gráfico de: ¿el Ran $\vec{f}$ (y bosquejo el Ran se y el graf $\vec{f}$ es igual a

$$\vec{f}(t) = (\cos t,\ \text{sen}\, t,\ \text{sen}\, t)$$

b) Un punto se mueve sobre la curva $y = \sqrt{x+1}$, partiendo del punto $(0,1)$ en el instante $t=1/4$ y se mueve a la derecha. Si la distancia del punto al origen es proporcional a t, halle una función vectorial que describa el Movimiento.

t	1/4
x	0
y	1

③ Dada las funciones: $\vec{f}(t) = (\ln(1+t), \sqrt{t}, \ln(1+t))$

$$\vec{g}(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \frac{1}{\ln(1+t)}, \sqrt{t}\right)$$

a) Halle el dominio de $\vec{f}$ y Trace su gráfica

b) ¿Es la función $\vec{f} \times \vec{g}$ continua en $t=0$? Justificar.

④ Sea C la curva de Ecuación Vectorial:

$$\vec{f}(t) = (1-2t,\ t^2,\ 2e^{2(t-1)})$$

Hallar la Ecuación de la recta tangente en el punto en que el vector $\vec{f}'(t)$ es paralelo a $\vec{f}(t)$

⑤ Sean C y C_1 las curvas descritas por las siguientes funciones

$$\vec{f}(t) = \left(\ln(t+2),\ e^{t^2}+1,\ \frac{5}{1+t}\right)$$

$$\vec{g}(t) = \left(\ln 2t,\ 3t^2-1,\ \frac{5+5t}{2}\right)$$

Hallar las Ecuaciones de las rectas Tangentes a cada una de estas curvas en el punto de intersección:

⑥ Hallar el punto en que se cortan las curvas:

$$\vec{f}(t) = (e^t, 2\operatorname{sen}(t+\pi/2), t^2-2)$$

$$\vec{g}(t) = (t, 2, t^2-3)$$ así como el ángulo de Intersección

⑦ Usando diferenciales. halle un valor aproximado de la rapidez (módulo del vector velocidad) de una partícula en el instante $t = 1.4$ seg. Si para cualquier instante t: $\vec{V}'(t) = (-\pi^2 \operatorname{sen}\pi t, \pi\cos\pi t, 2\pi t\, e^{-t^2})$

y $\vec{V}(0) = (\pi, 0, -\pi e)$

Siendo $\vec{V}$ el vector Velocidad

⑧ Hallar la Longitud de la curva definido por:

$$\vec{f}(t) = (t, 1+t^2)$$ desde el punto en que $f(t)$ y $f'(t)$ son paralelos y de sentido contrario hasta el punto en que los mismos vectores son ortogonales

⑨ Sean las curvas:

$$C_1: \vec{f}(t) = (e^t\cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$$

$$C_2: \vec{g}(t) = (t+1, t^2, t+1) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

En cuanto debe incrementarse t para que la longitud de arco de C_1 se incremente en $(e-1)\sqrt{3}$ desde el instante en que C_2 intercepta a C_1

⑩ Sea L_1 y L_2, respectivamente, las longitudes de las curvas descritas por: $\vec{f}(t) = (t, e^t)$, $0 \le t \le 1$

$g(t) = (t+\ln t, t-\ln t)$, $1 \le t \le e$ Calcular el valor de: $\dfrac{L_2}{L_1}$

⑪ Encontrar la Longitud de la curva definida por:

$$\vec{f}(t) = \left(\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du, \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}\,du, 4t^{1/2}\right)$$ entre $t=1$ y $t=t_1$, sabiendo que $\vec{f}(t_1)$ es el punto donde $f'(t_1)$ es paralelo al plano yz $(1 < t_1 < 2)$

2. a) Dibuje el rango de $\vec{f}(t) = (t, t, 2t^2)$, $D_f = [-3,3]$

el punto $(x,y,z) \in R_{\vec{f}}$ si y solo si:

$x = t$ para algun $t \in \mathbb{R}$
$y = t$
$z = 2t^2$

Asi $(x,y,z) \in R_{\vec{f}}$

$x^2 = t^2$
$y^2 = t^2$ $\Rightarrow x^2 - y^2 - z = 0$
$z = 2t^2$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = z$

Resolución Ejercicio 1:

$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

$= \left(\sqrt{1-t^2}, \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2}, \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}}\right)$

(a) $D_{f_1}(t) = 1 - t^2 \geq 0$
$(t+1)(t-1) \leq 0$
$t \in [-1,1] = D_{f_1}$

$D_{f_2}(t) = t - \frac{1}{4} \neq 0 \wedge t \in \mathbb{R}$
$= t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{4}\} = D_{f_2}$

$D_{f_3}(t) \Rightarrow \sqrt{t}$, $t > 0$, no puede ser $t = 0 \rightarrow 1 - e^{2(0)} \Rightarrow \frac{0}{0}$
$t \in \langle 0, \infty \rangle = D_{f_3}$

$D_{\vec{f}(t)} = D_{f_1(t)} \cap D_{f_2(t)} \cap D_{f_3(t)}$
$= \langle 0, 1/4 \rangle \cup \langle 1/4, 1]$

(b) $\lim_{t \to 0^+} \vec{f}(t) = \begin{cases} \circ \lim_{t\to 0^+} \sqrt{1-t^2} = \underline{1} \\ \circ \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2} = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen}(t-1/4)}{(t-1/4)}\right]^2 \\ \lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2} = \frac{(\operatorname{sen}(0-1/4))^2}{(0-1/4)^2} = \underline{16\operatorname{sen}^2(-1/4)} \end{cases}$

$\circ \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{2\sqrt{t}}}$

Regla de L'Hopital $\Rightarrow \frac{0}{0}$ ind $\rightarrow 1^\infty = 2$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2e^{2\sqrt{t}}} = \underline{\frac{1}{2}}$

$\hookrightarrow$ 0°0 $\exists \lim_{t\to 0^+} \left(\sqrt{1-t^2}, \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2}, \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}}\right)$
$= (1, 16\operatorname{sen}^2(-1/4), 1/2)$

$\nexists \lim_{t\to 0^-} \vec{f}(t)$ puesto que no $\nexists \lim_{t\to 0^-} f_3(t)$

(c) Existe el limite en cada punto del $D_{\vec{f}(t)} = \langle 0, 1/4 \rangle \cup \langle 1/4, 1]$ por tanto la $\vec{f}(t)$ es continua en todo punto del intervalo

(d) Para poder afirmar se nos pide que sea continua en $\langle 0, 1]$, debo hallar $\lim_{t\to 1/4} \vec{f}(t)$, puesto que $t = \frac{1}{4}$ presenta discontinuidad ε

$\lim_{t\to 1/4} \vec{f}(t)$

$\circ \lim_{t\to 1/4} \sqrt{1-t^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\circ \lim_{t\to 1/4} \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2} \overset{\text{cambio}}{=} t > 1/4$, $t - 1/4 > 0$, $t_1 > 0$

$\lim_{t_1\to 0} \frac{1-\cos^2 t_1}{t_1^2}$; propiedad $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$

$\lim_{t_1\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t_1}{t_1}\right)^2 = 1$

$\circ \lim_{t\to 1/4} \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}} = \frac{1}{2(1-e)}$

$\Rightarrow \exists \lim_{t\to 1/4} \left(\sqrt{1-t^2}, \frac{1-\cos^2(t-1/4)}{(t-1/4)^2}, \frac{\sqrt{t}}{1-e^{2\sqrt{t}}}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, 1, \frac{1}{2(1-e)}\right)$

en el punto $t = 1/4$

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos t = x$	1	0	-1	0	1
$4\operatorname{sen} t = y$	0	4	0	-4	0
$\operatorname{sen} t = z$	0	1	0	-1	0

TABLA para $[0, 2\pi] \in t$ (Necesariamente para OBS. van con Aparece LA HÉLICE DEL CILINDRO

Resolución Ejercicio 2

(a) Para Bosquejar necesariamente DEBO Buscar una Forma Cartesiana

$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$
$= (\cos t, 4\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$

$f_1(t) \Rightarrow x = \cos t$
$f_2(t) \Rightarrow y = 4\operatorname{sen} t$
$f_3(t) \Rightarrow z = \operatorname{sen} t$

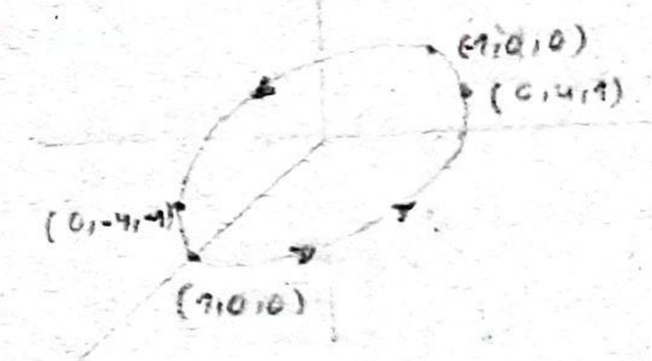
comenzar jugando con x e y para que converge con el plano XY y crezca la superficie

- en el Dom es Elipse
- en el grafo es un cilindro Elíptico de eje XY

$\begin{cases} x^2 = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{16} = \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

$z = \operatorname{sen} t \Rightarrow y = 4z$ recta $\perp$ al ZY

el Dom f (y Bosquejo el Dom f)



el graf es ondulante tal que el $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$

(b)

"Distancia recorrida al origen es proporcional a t

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = Kt$$

↓ para cualquier t

↳ $t = 1/4 \rightarrow (x,y) = (0,1)$

$$d = \sqrt{0^2+1^2} = K\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow K = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 4t$$

"Halle función vectorial"

↳ $x^2+y^2 = 16t^2 \rightarrow x^2 = 16t^2 - y^2$

↳ $y = \sqrt{x^2+1} \rightarrow y = \sqrt{16t^2-y^2+1}$

$$2y^2 = 16t^2 + 1$$

$$y^2 = 8t^2 + \frac{1}{2}$$

reemplazo:

$$x^2 = 16t^2 - y^2$$

$$= 16t^2 - (8t^2 + \frac{1}{2})$$

↳ $x = \sqrt{8t^2 - \frac{1}{2}}$

$$y = \sqrt{8t^2 - \frac{1}{2} + 1}$$

↳ $y = \sqrt{8t^2 + \frac{1}{2}}$

∴ función vectorial que describe el arco

$$\vec{F}(t) = \left(\sqrt{8t^2 - \frac{1}{2}}, \sqrt{8t^2 + \frac{1}{2}}\right)$$

tal que $t \in [1/4, +\infty)$

↳ de acuerdo a $t = 1/4$ para agarrar valor dado en el problema

7)

$$V(t) = \int V'(t)\,dt = \left(\int -\pi^2 \operatorname{sen}\pi t\,dt,\ \int \pi\cos\pi t\,dt,\ \int 2\pi t e^{1-t^2}\,dt\right)$$

↳ $\int -\pi^2 \operatorname{sen}\pi t\,dt = -\pi \int \pi \operatorname{sen}\pi t\,dt = \pi\cos\pi t + C_1$

↳ $\int \pi\cos\pi t\,dt = \pi \int \cos\pi t\,dt = \pi \operatorname{sen}\pi t + C_2$

↳ $\int 2\pi t e^{1-t^2}\,dt = 2\pi \int t\, e^{1-t^2}\,dt$

↳ $\int t\, e^{1-t^2}\,dt \qquad u = 1-t^2,\ du = -2t\,dt$

$$= -\frac{1}{2}\int (-2t) e^{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{2} e^u$$

$$= -\frac{1}{2} e^{1-t^2} + C_3$$

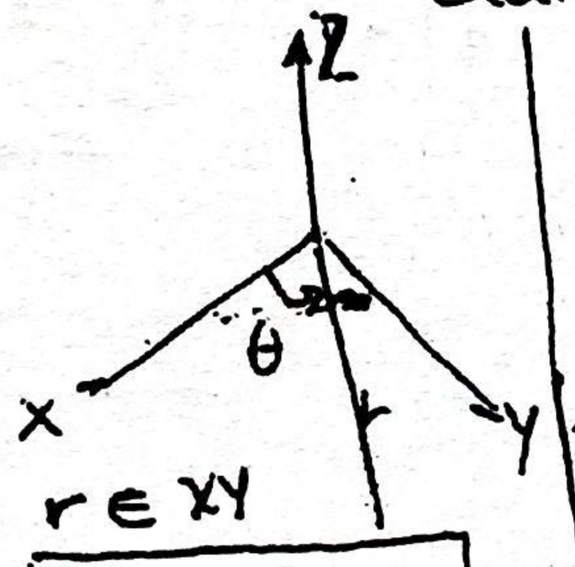
↳ $\int 2\pi t e^{1-t^2}\,dt = -\pi \cdot e^{1-t^2} + C_3$

↳) $V(t) = (\pi\cos\pi t + C_1,\ \pi \operatorname{sen}\pi t + C_2,\ -\pi e^{1-t^2} + C_3)$

Su uso: Para las coordenadas cilíndricas

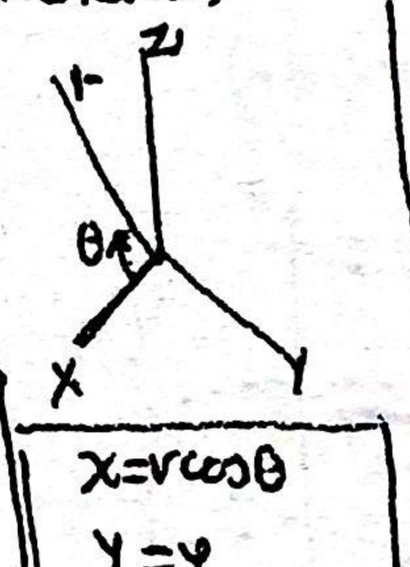
$z=2$ plano XY | $y=2$ plano XZ | $x=2$ plano YZ

Representación en coordenadas CILÍNDRICAS



$x = r\cos\theta$
$y = r\operatorname{sen}\theta$
$z = z$

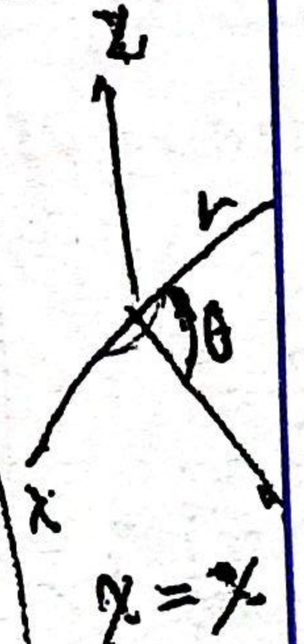
Definición del problema



$x = r\cos\theta$
$y = y$
$z = r\operatorname{sen}\theta$

$r \in XZ$

Definición del problema



$x = x$
$y = r\theta$
$z = r\operatorname{sen}$

?

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA DE CÁLCULO iii
2019-1 E.A. INGENIERÍA
METALÚRGICA 9 DE MAYO 2019, PROF. FÉLIX LEÓN

09 de mayo 2019

1ª PRACTICA DE CÁLCULO III 2019

1) Discutir el gráfico de la superficie de ecuación:

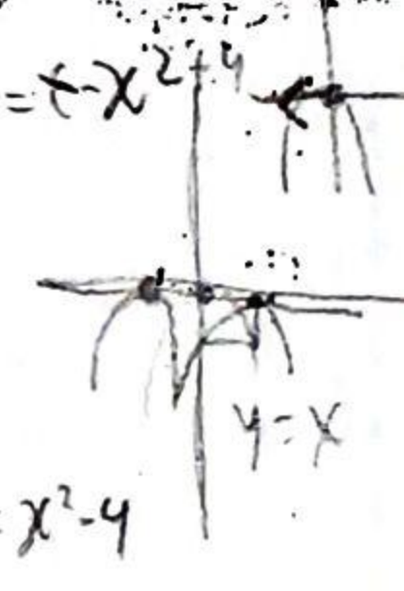
$$2z = \ln r^2 + \ln\left(r^2 \operatorname{Sen}^4\theta - 2r \operatorname{Sen}^2\theta \cos\theta + \cos^2\theta\right).$$

2) Hallar la ecuación de la superficie cónica en coordenadas cilíndricas, cuya directriz es la sección plana:

$r\cos\phi(r\cos\phi - 2) + 4r\cos\theta\operatorname{Sen}\phi + 6 = 0$, $y = -2$

y el vértice el punto $\left(2\sqrt{3}, -\pi/4, \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bosquejar el gráfico.



3) Un depredador persigue a su presa en forma normal según las ecuaciones:

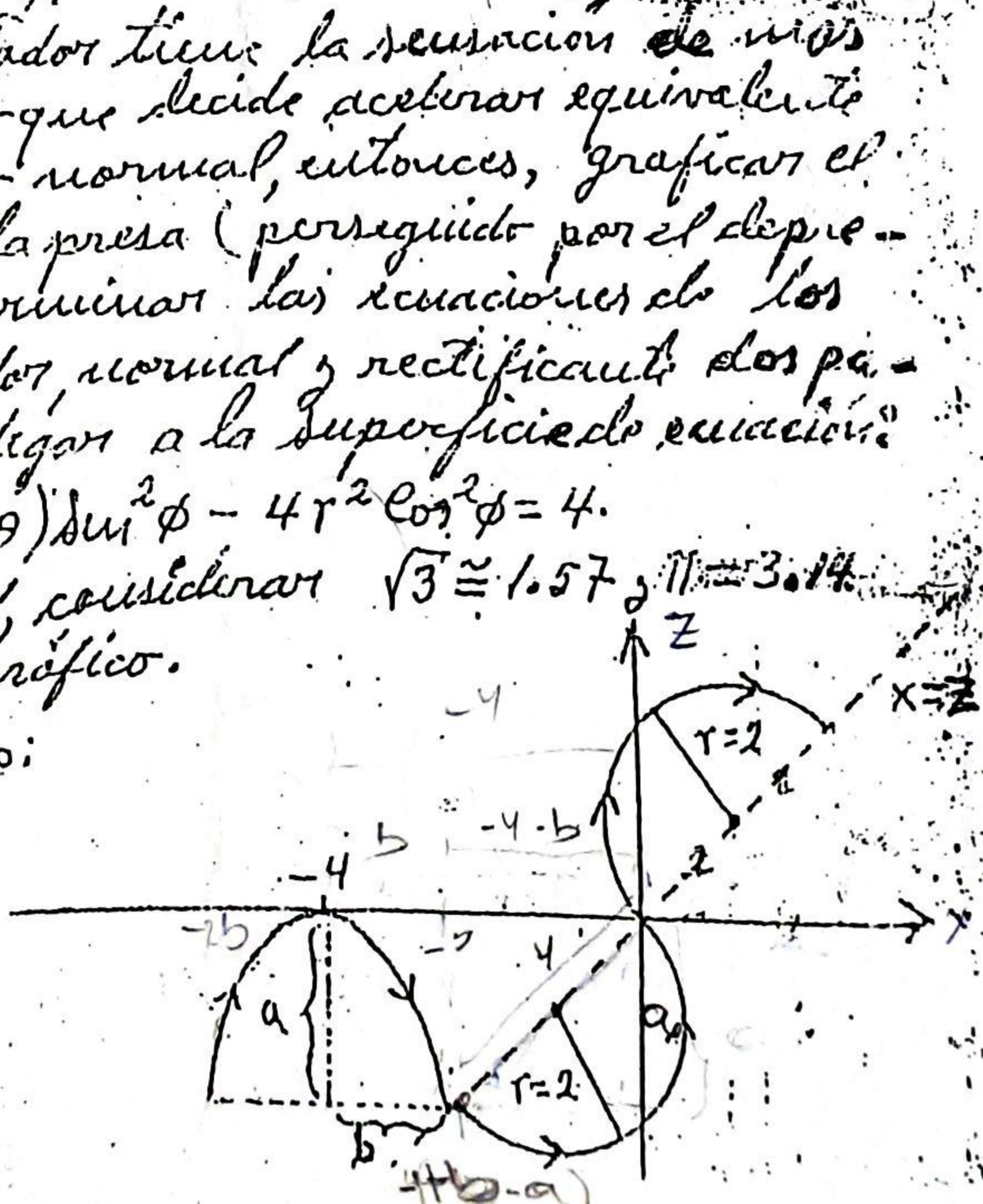
$x = 2\operatorname{Sen} t$, $y = 4\cos t$, $z = t$ { recorrido de la presa

pero el depredador tiene la desventaja de ser hombre por lo que decide acortar equivalente al doble de lo normal, entonces, graficar el recorrido de la presa (perseguido por el depredador) y determinar las ecuaciones de los planos: osculador, normal y rectificante de los que antes de llegar a la superficie de ecuación:

$r^2(\operatorname{Sen}^2\theta + 4\cos^2\theta)\operatorname{Sen}^2\phi - 4r^2\cos^2\phi = 4$.

Por comodidad, considerar $\sqrt{3} \cong 1.57$, $\pi = 3.14$

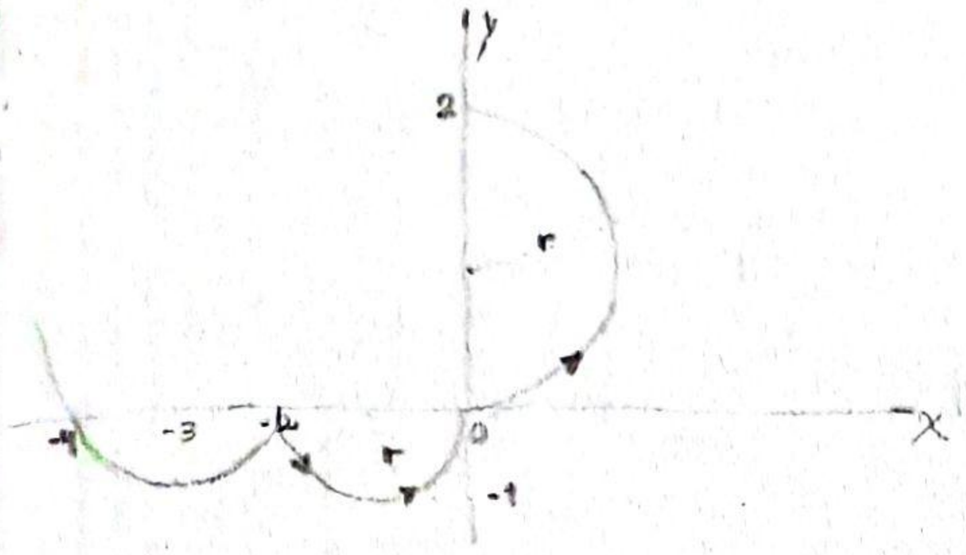
Bosquejar el gráfico.



4) Continuar el gráfito:

12 de Mayo Jueves 2019

determinar si existe una función vectorial cuyo grafo



se pediría por ejemplo:

Una hormiga viene del infinito pasa por -4, -2, 0 y se detiene en y=2. Cuando le cuenta que hay un camino la hormiga (parametrizar la curva)

Desde -4 a -2 hace un recorrido cónica (∪ , ⊂ , ∩). En este caso es una parábola y

debe existir una función vectorial que describe dicha curva

1a Para el comportamiento de la curva (de -4 a -2

V: Vértice = (-3, -1) , p: parámetro // algo y

→ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ o $(x+3)^2 = 4p(y+1)$: P

Abre (-2, 0) ∈ a la parábola: P $(-2+3)^2 = 4p(0+1)$

$p = +1/4$ ∴ la ecuación cartesiana : $(x+3)^2 = (y+1)$

Debe parametrizar, debe existir necesariamente un vector:

↳ Si $x = t$.

$(t+3)^2 = (y+1)$ → $y = (t+3)^2 - 1$

tabulando:

t	x	y
-4	-4	0
-3	-3	-1
-2	-2	0

∃ $\vec{\alpha} : \langle -\infty, 2 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \vec{\alpha}(t) = (t, (t+3)^2 - 1)$

Al tabular, la Hormiga cumple el recorrido

curva parametrizada

1.b Para el comportamiento C_1 (de -2 a 0)

Centro : (-1, 0) , r = 1

→ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ o $(x+1)^2 + y^2 = 1$

Parametrizando la curva

Si $x + 1 = -\cos t$, pues la curva es negativa, por eso el cos negativo en el IIIc

$y = -\operatorname{sen} t$

$\{ x = -1 - \cos t \;;\; y = -\operatorname{sen} t \}$

Tabulando: Ajusto el Dom

t	x	y
π	0	0
3π/2	-1	1 → este valor no cumple para C_1
2π	-2	0

t	x	y
π	0	0
3π/2	-1	-1
2π	-2	0

Ahora cumple

: se cambia $x = -1 - \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$

De tal forma que cumple el Dom de C_1

existe una función vectorial $\vec{\beta}$

∃ $\vec{\beta} : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \vec{\beta}(t) = (-1$

c) pero la hormiga camina en ondas y los valores

t	x	y
π	0	0
3π/2	-1	1
2π	-2	0

ESTAN DESORDENADOS

(cumpliría la condición si fuera un paramétrico)

los valores que cumplirían ordenados de t :

t	x	y
0	-2	0
π/2	-1	1
π	0	0

c) $x = -1 - \cos t$, $y = -\operatorname{sen} t$

c) ∃ $\vec{\beta} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \vec{\beta}(t) = (-1 - \cos t, -\operatorname{sen} t)$

1.c Para el comportamiento C_2 (de y = 0 a y = 2)

centro $C_2 : (0, 1)$, r = 1

→ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ o $x^2 + (y-1)^2 = 1$

Si $x = -\operatorname{sen} t$, $y - 1 = \cos t$ → $y = 1 + \cos t$ } Parametrizando la curva

tabulando para ajustar al Dom

t	x	y
π	0	0
3π/2	1	1
2π	0	2

SIGNO cumple en la tabulación, se cambia el signo a la función trigonométrica para ajustar el Dom en la TABULACIÓN (SIGNO cumple en la curva)

Función trigonométrica más lejana para el terminal de la curva

luego ∃ $\vec{\gamma}$ $[\pi; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

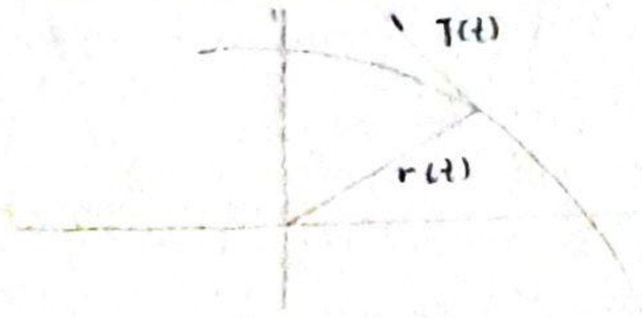
$t \longrightarrow$

$\vec{\gamma}(t) = (-\operatorname{sen} t, 1 + \cos t)$

luego

$\vec{f}(t) : \begin{cases} \alpha(t) = & , \; t \leq -2 \\ \beta(t) = & , \; 0 \leq t \leq \pi \\ \gamma(t) = & , \; \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

1. VECTORES UNITARIOS



Def: vector

$$T(t) = \frac{r(t)}{\| r'(t) \|}$$

2. VECTOR NORMAL

$$\text{Def: } N(t) = \frac{T'(t)}{\| T'(t) \|}$$ y $T'(t)$ y $T(t)$ son vectores ortogonales

$\theta(t)$ se incrementa cuando t se incrementa:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

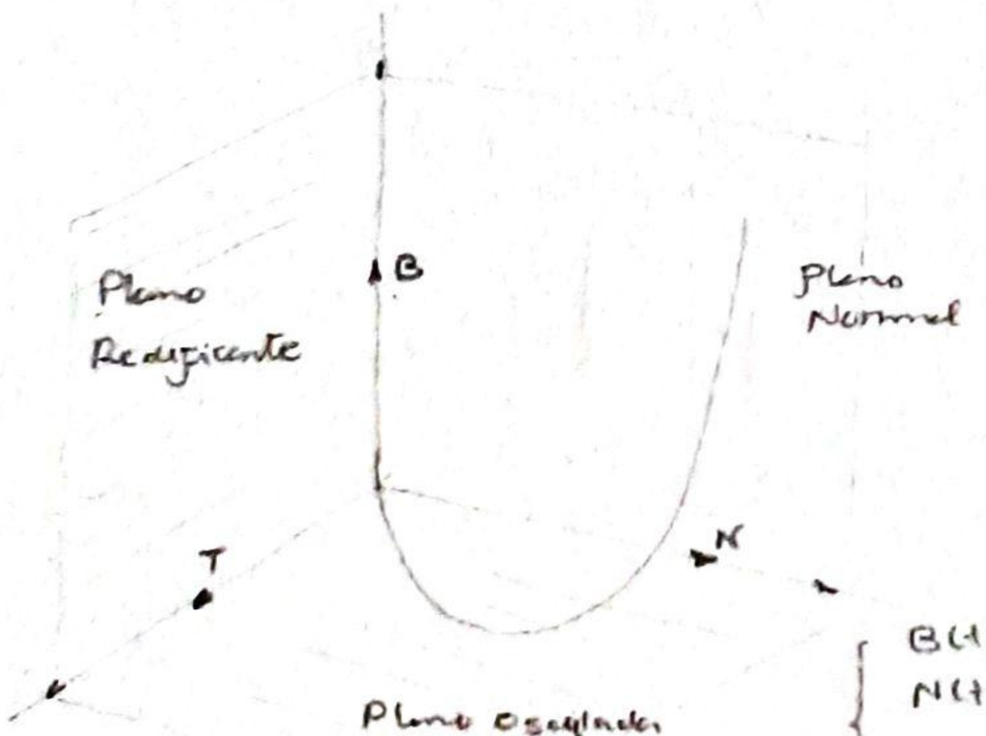
Cadena regla

3. Vectores BINORMALES

Def: $B(t) = T(t) \times N(t)$

es decir $B(t) \perp T(t)$ como $N(t)$ está orientado con relación $T(t)$ y $N(t)$ por la regla de la mano (antes el pulgar ahora regla de la cadena), además $T(t) \times N(t)$ es un vector unitario:

$$\| T(t) \times N(t) \| = 1$$



"Es un TRIEDRO móvil"

$$\begin{cases} B(t) = T(t) \times N(t) \\ N(t) = B(t) \times T(t) \\ T(t) = N(t) \times B(t) \end{cases}$$

El sistema de coordenadas determinado por $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ se llama sistema de referencia TNB

1 ejemplo:

Hallar la longitud de arco y los vectores unitarios y planos P_O, P_N y P_{RE} en $t_0 = \pi/2$

si $\bar{f} = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$

Sol 1

$$f'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a\cos t, b)$$ tiene la forma de cilindro parametrizado anteriormente

$$\| f'(t) \| = \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}$$

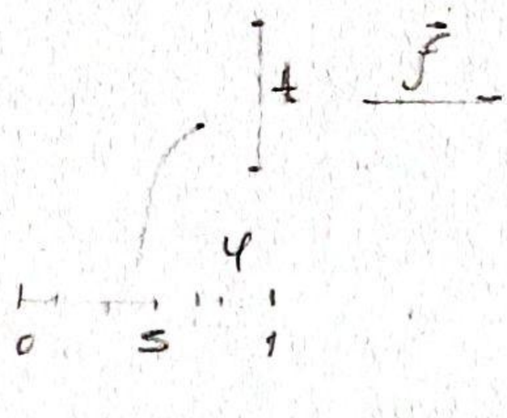
$$\| f'(t) \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

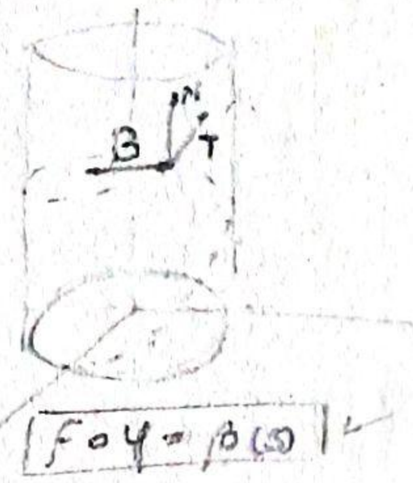
$$s = \text{long (curva)} = \text{lng}(C) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, dt$$

$$s = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$ "hallar la derivada respecto al parámetro"

$$\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = t = \varphi(s)$$ la conecto con la inversa

por composición de funciones





Para que el módulo sea 1 se parametriza la curva parametrizada en función de la longitud de arco

$$\beta(s) = f(\varphi(s))$$

$$\beta(s) = f\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$\rightarrow \| \beta(s) \| = 1$

Ahora P_O : $F \circ \varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P \longrightarrow \beta(s) = f \circ \varphi(s)$

Tangencia, Normal, Binormal: todos de módulo 1 (vectores unitarios)

Esta manera de parametrizar la curva por la longitud de arco

B_t : matriz de cambio i, j, k

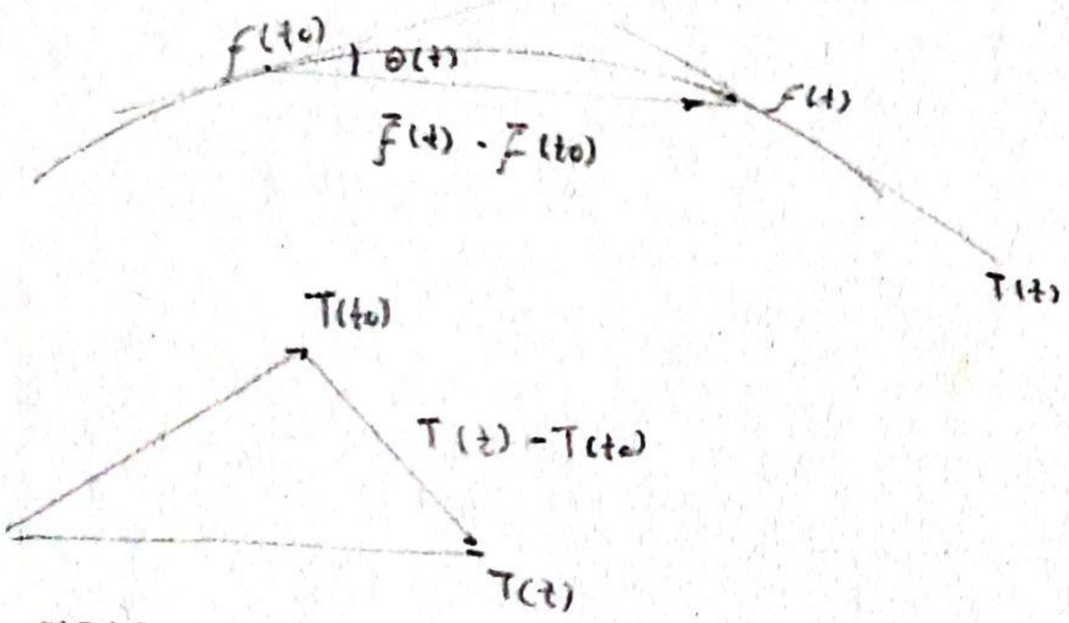
Tangente es un doble y derivo

En la curva se da el punto de inflexión: cuando un pierno de construcción se doble "curvatura"

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es una curva regular en $[a,b]$
$t \longrightarrow f(t)$ o C^1. Es porque tiene derivada lo que implica continuidad.

Sean los puntos $f(t_0)$. $f(t)$ pertenece a la curva
↓ fijo ↓ cualquiere

todos con $f(t_0)$ y $f(t_0) \in C$ (curva)



Cambio de dirección en la curva ⇒ $T(t) - T(t_0)$

entre $\bar{f}(t_0)$ y $\bar{f}(t)$, cuya modulo $\|f(t) - f(t_0)\|$
longitud de arco desde el punto $f(t_0)$ hasta $f(t)$

° La razón : $\left| \frac{T(t) - T(t_0)}{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)} \right|$

es la medida cuando la curva la curva C

La razón infinitesimal de $\left| \frac{T(t) - T(t_0)}{\bar{f}(t) - f(t_0)} \right|$

límite cuando : $t \to t_0$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\left\| \frac{T(t) - T(t_0)}{t - t_0} \right\|}{\left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\|} = \left| \frac{T'(t_0)}{f'(t_0)} \right| \quad \text{donde}$$

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(t)\| \, du$$

→ Aplicando el Teorema Fundamental del Calculo

$$C'(t) = \|f(t)\|$$

NOTA: la curvatura es una medida o un vector

Regional:

El número $K(t_0) = \frac{\|T'(t)\|}{\|f'(t_0)\|}$

es llamado curvatura de la curva C en el punto $f(t_0)$

Regional 2:

El vector $K(t) = \frac{T'(t)}{\|f'(t)\|}$ se llama vector

curvatura de C en el punto $f(t_0)$.

El escalar $K = \|\vec{K}(t)\|$ se llama curvatura

$a\cos t + b\operatorname{sen} t = C$

Hallar la curvatura de la circunferencia y del círculo
Demostrar

Hallar los elementos (NIEDNOS) : Función y curvatura

Vier 03 Mayo 2019

Torsión

Def: es una medida del promedio de los desviaciones del PLANO OSCULADOR teniendo este desviación con respecto a la longitud de área:

$$B'(t) = (B'\cdot T)T + (B'\cdot N)\cdot N + (B'\cdot B)B$$

$$B'(t) = (B'\cdot N)N$$

$$B'(t) \parallel N$$

$$\exists\ B'(t) = \lambda(t)N$$

Todo vector es una combinación lineal de los vectores base.

$$\frac{B'(t)}{S'(t)}$$

Ecuación Normal de la Curvatura

Ejercicios.

1. Hallar el vector tangente $T(t)$ a la curva $\vec{f}(t) = (t^2, t^3, t^6)$ en el punto $t=1$

$$T(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$$

$$T(t) = \frac{(t^2, t^3, t^6)'}{\|(t^2, t^3, t^6)'\|} = \frac{(2t, 3t^2, 6t^5)}{\|2t, 3t^2, 6t^5\|} = \frac{(2t, 3t^2, 6t^5)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4 + 36t^{10}}}$$

Luego para $t=1$:

$$T(t) = \frac{(2, 3, 6)}{\sqrt{49}} \Rightarrow \therefore \boxed{T(t) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)}$$

2: Hallar el vector unitario tangente a la curva $\vec{f}(t) = (5t, 12\cos t, 12\operatorname{sen} t)$ en un punto cualquiera.

$$T(t) = \frac{(5t, 12\cos t, 12\operatorname{sen} t)'}{\|(5t, 12\cos t, 12\operatorname{sen} t)'\|} = \frac{(5, -12\operatorname{sen} t, 12\cos t)}{\|(5, -12\operatorname{sen} t, 12\cos t)\|}$$

$$T(t) = \frac{(5, -12\operatorname{sen} t, 12\cos t)}{\sqrt{25 + 144\operatorname{sen}^2 t + 144\cos^2 t}} = \frac{(5, -12\operatorname{sen} t, 12\cos t)}{\sqrt{25 + 144(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}}$$

$$T(t) = \frac{(5, -12\operatorname{sen} t, 12\cos t)}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{(5, -12\operatorname{sen} t, 12\cos t)}{\sqrt{169}}$$

$$\therefore \boxed{T(t) = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\operatorname{sen} t, \frac{12}{13}\cos t\right)}$$

3.- Hallar el vector $\mathcal{B}$ de la hélice en un punto arbitrario.

Sol:

Ecuación de la hélice

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$$

Sea $\mathcal{B} = \dfrac{B_t}{\|B_t\|}$

Luego la hélice $\vec{f}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, \sqrt{R^2 - a^2}\, t)$

Para: $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$

Hallando $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'t}{\|\vec{r}\,'t\|} = \dfrac{(-a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t,\ \sqrt{R^2-a^2})}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2}}$

$$\vec{T}(t) = \frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t,\ \sqrt{R^2-a^2})}{\sqrt{a^2(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t) + R^2 - a^2}} = \frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t,\ \sqrt{R^2-a^2})}{\sqrt{a^2 + R^2 - a^2}}$$

$$\therefore \vec{T}(t) = \left(\frac{-a\,\mathrm{sen}\,t}{R},\ \frac{a\cos t}{R},\ \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\right)$$

Hallando $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \dfrac{(-a\cos t/R,\ -a\,\mathrm{sen}\,t/R,\ 0)}{\sqrt{\dfrac{a^2\cos^2 t}{R^2} + \dfrac{a^2\,\mathrm{sen}^2 t}{R^2}}}$

$$\vec{N}(t) = \frac{(-a\cos t/R,\ -a\,\mathrm{sen}\,t/R,\ 0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)}} = \frac{(-a\cos t/R,\ -a\,\mathrm{sen}\,t/R,\ 0)}{\frac{a}{R}}$$

$$\therefore \vec{N}(t) = (-\cos t,\ -\mathrm{sen}\,t,\ 0)$$

Entonces:

$$\vec{B}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-a\,\mathrm{sen}\,t}{R} & \frac{a\cos t}{R} & \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R} \\ -\cos t & -\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(t) = \left(\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\,\mathrm{sen}\,t,\ -\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t,\ \frac{a}{R}\right) \checkmark$$

Luego hallando β:

$$\beta = \frac{\left(\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\,\mathrm{sen}\,t,\ -\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t,\ \frac{a}{R}\right)}{\sqrt{\frac{(R^2-a^2)\mathrm{sen}^2 t}{R^2} + \frac{(R^2-a^2)\cos^2 t}{R^2} + \frac{a^2}{R^2}}}$$

$$\beta = \frac{\left(\frac{-\sqrt{R^2-a^2}}{R}\,\mathrm{sen}\,t,\ -\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t,\ \frac{a}{R}\right)}{\sqrt{\left(\frac{R^2-a^2}{R^2}\right)(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t) + \frac{a^2}{R^2}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\,\mathrm{sen}\,t,\ -\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t,\ \frac{a}{R}\right)}{\sqrt{\frac{R^2-a^2+a^2}{R^2}}}$$

$$\therefore \boxed{\beta = \left(\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\,\mathrm{sen}\,t,\ -\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t,\ \frac{a}{R}\right)}$$

4.- Hallar el vector normal de la hélice en un punto cualquiera.

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}(t)\|}$$

Pero según el problema anterior:

$$\vec{T}(t) = \left(-\frac{a\,Sen\,t}{R}, \frac{a\,Cos\,t}{R}, \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R} \right)$$

$$\therefore \vec{N}(t) = \frac{\left(-a\,Cos\,t/R, -a\,Sen\,t/R, 0\right)}{\sqrt{\frac{a^2\,Cos^2 t}{R^2} + \frac{a^2\,Sen^2 t}{R^2}}}$$

$$\therefore \boxed{\vec{N}(t) = (-\cos t, -Sen\,t, 0)}$$

5.- Hallar la torsión de la hélice. $\alpha(t) = (a\,Cos\,t, a\,Sen\,t, \sqrt{R^2-a^2}\,t)$

Sea $\tau(t) = \dfrac{[\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)] \cdot \vec{\alpha}'''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|^2}$

Luego: $\vec{\alpha}'(t) = \left(-a\,Sen\,t, a\,Cos\,t, \sqrt{R^2-a^2}\right)$

$$\vec{\alpha}''(t) = (-a\,Cos\,t, -a\,Sen\,t, 0)$$

$$\vec{\alpha}'''(t) = (a\,Sen\,t, -a\,Cos\,t, 0)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{\left[\left(-a\,Sen\,t, a\,Cos\,t, \sqrt{R^2-a^2}\right) \times \left(-a\,Cos\,t, -a\,Sen\,t, 0\right)\right] \cdot (a\,Sen\,t, -a\,Cos\,t, 0)}{\|(-a\,Sen\,t, a\,Cos\,t, \sqrt{R^2-a^2}) \times (-a\,Cos\,t, -a\,Sen\,t, 0)\|^2}$$

Luego:
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\,Sen\,t & a\,Cos\,t & \sqrt{R^2-a^2} \\ -a\,Cos\,t & -a\,Sen\,t & 0 \end{vmatrix} = \left(a\,Sen\,t\sqrt{R^2-a^2}, -a\,Cos\,t\sqrt{R^2-a^2}, a^2\right)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{\left(a\,Sen\,t\sqrt{R^2-a^2}, -a\,Cos\,t\sqrt{R^2-a^2}, a^2\right) \cdot (a\,Sen\,t, -a\,Cos\,t, 0)}{\left(\sqrt{a^2\,Sen^2 t\,(R^2-a^2) + a^2\,Cos^2 t\,(R^2-a^2) + a^4}\right)^2}$$

$$\tau(t) = \frac{a^2\,Sen^2 t\sqrt{R^2-a^2} + a^2\,Cos^2 t\sqrt{R^2-a^2}}{a^2R^2 - a^4 + a^4} = \frac{a^2\sqrt{R^2-a^2}}{a^2R^2}$$

$$\therefore \boxed{\tau(t) = \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}}$$

6- Hallar la curvatura de la linea $y = -x^3$, en el punto $x = 1/2$

Sea $K(x) = \dfrac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$, $f'(x) = -3x^2$ ∧ $f''(x) = -6x$

$$K(x) = \frac{|-3|}{\left\{1 + [(-3x^2)^2]^{3/2}\right\}}$$

Luego, para $x = 1/2$

$$K(1/2) = \frac{3}{\left[1 + \frac{9}{16}\right]^{3/2}} \Rightarrow K_{(1/2)} = \frac{3}{\frac{125}{64}}$$

$$\therefore \boxed{K_{(1/2)} = 192/125}$$

7- Hallar la curvatura en un punto cualquiera de la cicloide.

$$x = a(t - \operatorname{Sen} t)$$
$$y = a(1 - \operatorname{Sen} t)$$

Sol:

$$K(t) = \left\| \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \right\|$$

Hallando: $x' = a(1 - \cos t)$ $\quad y' = a(-\cos t)$

$x'' = a(1 + \operatorname{sen} t)$ $\quad y'' = a \operatorname{Sen} t$

Sostituyendo y hallando $K(t)$:

$$K(t) = \left\| \frac{a(1-\cos t) \cdot a \operatorname{Sen} t - a(1 + \operatorname{Sen} t) \cdot -a\cos t}{(a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \cos^2 t)^{3/2}} \right\|$$

$$K(t) = \left\| \frac{a^2 \operatorname{Sen} t - a^2 \operatorname{Sen} t \cos t + a^2 \cos t + a^2 \cos t \operatorname{Sen} t}{\{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \cos^2 t\}^{3/2}} \right\|$$

$$K(t) = \left\| \frac{a^2 (\operatorname{Sen} t + \cos t)}{[a^2\{(1-\cos t)^2 + \cos^2 t\}]^{3/2}} \right\| = \left\| \frac{a^2 (\operatorname{Sen} t + \cos t)}{[a^2 (1 - 2\cos t + 2\cos^2 t]^{3/2}} \right\|$$

$$\therefore \boxed{K(t) = \frac{\operatorname{Sen} t + \cos t}{a\,(1 - 2\cos t + 2\cos^2 t)^{3/2}}}$$

8: Hallar la coordenada del centro de curvatura de la linea $x^3+y^4=2$ en $M(1,1)$

Sol:

$$x^3+y^4=2 \Rightarrow y=(2-x^3)^{1/4}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{4}(2-x^3)^{-3/4}(-3x^2) \wedge y''=-\frac{3}{2}x(2-x^3)^{-3/4}-\frac{27}{16}x^4(2-x^3)^{-7/4}$$

Luego como $x=1$

$$\Rightarrow y'=\frac{-3}{4} \wedge y''=\frac{-51}{16}$$

Por fórmula: $\xi=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}$ $\wedge$ $\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$, para $C(\xi,\eta)$

Reemplazando y hallando: $M(1,1)$

$$\xi=1-\frac{(1+(-3/4)^2)-3/4}{-51/16}=1-\frac{(25/16)(-3/4)}{-51/16}=1-\frac{25}{68}$$

$$\therefore \xi=43/68$$

$$\eta=1+\frac{(1+(-3/4)^2)}{-51/16}=1+\frac{25/16}{51/16}=1+\frac{25}{51}$$

$$\therefore \eta=26/51$$

$$\therefore \boxed{C=(43/68,\ 26/51)}$$

9: Hallar la curvatura K de la hélica cuando $t=1$

Sea:

$$K(t)=\left\|\frac{D_t\cdot\vec{T}(t)}{\|f'(t)\|}\right\|$$

$$f(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ \sqrt{R^2-a^2}\,t)$$

Luego como en el ejercicio 4 : $\vec{T}'(t) = \left(\frac{-a\cos t}{R}, \frac{-a\,\mathrm{sen}\,t}{R}, 0 \right)$

Reemplazando $f'(t) = -a\,\mathrm{sen}\,t,\ a\cos t,\ \sqrt{R^2-a^2}$

$$K(t) = \left\| \frac{-a\cos t/R,\ -a\,\mathrm{sen}\,t/R,\ 0}{\sqrt{a^2\mathrm{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2}} \right\|$$

$$K(t) = \left\| \frac{-a\cos t/R,\ -a\,\mathrm{sen}\,t/R,\ 0}{R} \right\| = \left\| \frac{-a\cos t}{R^2}, \frac{-a\,\mathrm{sen}\,t}{R^2}, 0 \right\|$$

$$K(t) = \frac{a^2\cos^2 t + a^2\,\mathrm{sen}^2 t}{R^4} \qquad R^4$$

$$\therefore \boxed{K(t) = \frac{a^2}{R^4}}$$

10. Escribir la ecuación del plano osculador de la hélice en el punto arbitrario.

Sea : $\mathcal{P}_0 : \vec{B}(t_0) \cdot \{(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)\} = 0$

Pero de acuerdo al ejercicio 3 :

$$\vec{B}(t_0) = \left(\frac{\sqrt{R^2-a^2}\,\mathrm{sen}\,t}{R}, \frac{-\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}, \frac{a}{R} \right)$$

Además $\mathcal{P}_0$ pasa por el punto $(a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{R^2-a^2}\,t)$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_0 = \left[\frac{\sqrt{R^2-a^2}\,\mathrm{sen}\,t}{R}, \frac{-\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}, \frac{a}{R} \right] \cdot \left[(x,y,z) - (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{R^2-a^2}\,t) \right] = 0$$

$$\mathcal{P}_0 = \left[\frac{\sqrt{R^2-a^2}\,\mathrm{sen}\,t}{R}, \frac{-\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}, \frac{a}{R} \right] \cdot \left[x - a\cos t, y - a\,\mathrm{sen}\,t, z - \sqrt{R^2-a^2}\,t \right] = 0$$

$$\mathcal{P}_0 = \frac{-\sqrt{R^2-a^2}\,\mathrm{sen}\,t\,(x - a\cos t)}{R} + \frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t\,(a\,\mathrm{sen}\,t - y)}{R} + \frac{a}{R}\left(z - \sqrt{R^2-a^2}\,t\right) = 0$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{R^2-a^2}\,x\,\mathrm{sen}\,t + \sqrt{R^2-a^2}\,y\cos t + az - a\sqrt{R^2-a^2}\,t = 0}$$

Jueves 09 Mayo, 2019

Problema tipo 1 Practica:

Supongamos que la Hormiga se mueve según la ecuación

$$x = e^{-t}\cos t \;,\quad y = \frac{1}{e^t} \;,\quad z = e^{-t}\operatorname{sen} t$$

graficar el recorrido de la hormiga, además halle la ecuación de los planos P_O, P_N y P_R cuando $T = 3\pi/2$

osculador normal rectificante

Sol:

Se presenta la función vectorial paramétrica $\vec{f}(t) = (e^{-t}\cos t \;,\; \frac{1}{e^t} \;,\; e^{-t}\operatorname{sen} t)$

se desea llegar a una función vectorial cartesiana

Por definición:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longrightarrow \vec{f}(t) = (e^{-t}\cos t \;,\; \frac{1}{e^t} \;,\; e^{-t}\operatorname{sen} t) = (x, y, z)$$

función vectorial paramétrica — función vectorial cartesiana

→ Se iguala:

$$x = e^{-t}\cos t \;\rightarrow\; \frac{x}{e^{-t}} = \cos t \qquad z = e^{-t}\operatorname{sen} t \;\rightarrow\; \frac{z}{e^{-t}} = \operatorname{sen} t$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{e^{-2t}} + \frac{z^2}{e^{-2t}} = 1$$

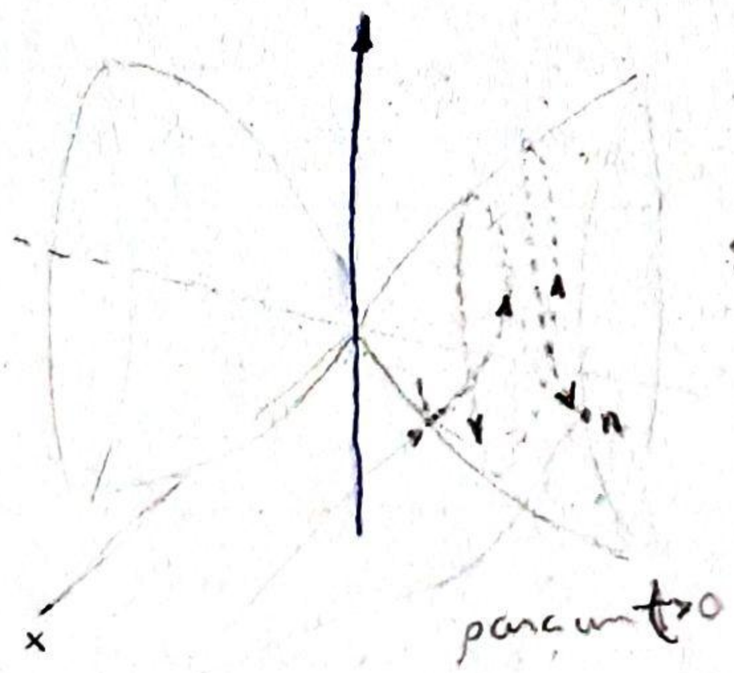
$$x^2 + z^2 = e^{-2t} \;,\; e^{-t} = y$$

$$\boxed{x^2 + z^2 = y^2} \quad -\textcircled{1}$$

Se necesita necesariamente cuando se tiene una función vectorial paramétrica, llegar a pasar a una función cartesiana para poder graficarlo

-① : A partir de las superficies cuadráticas, se puede deducir que es una SUPERFICIE CÓNICA

Por tanto el grafico de la superficie:



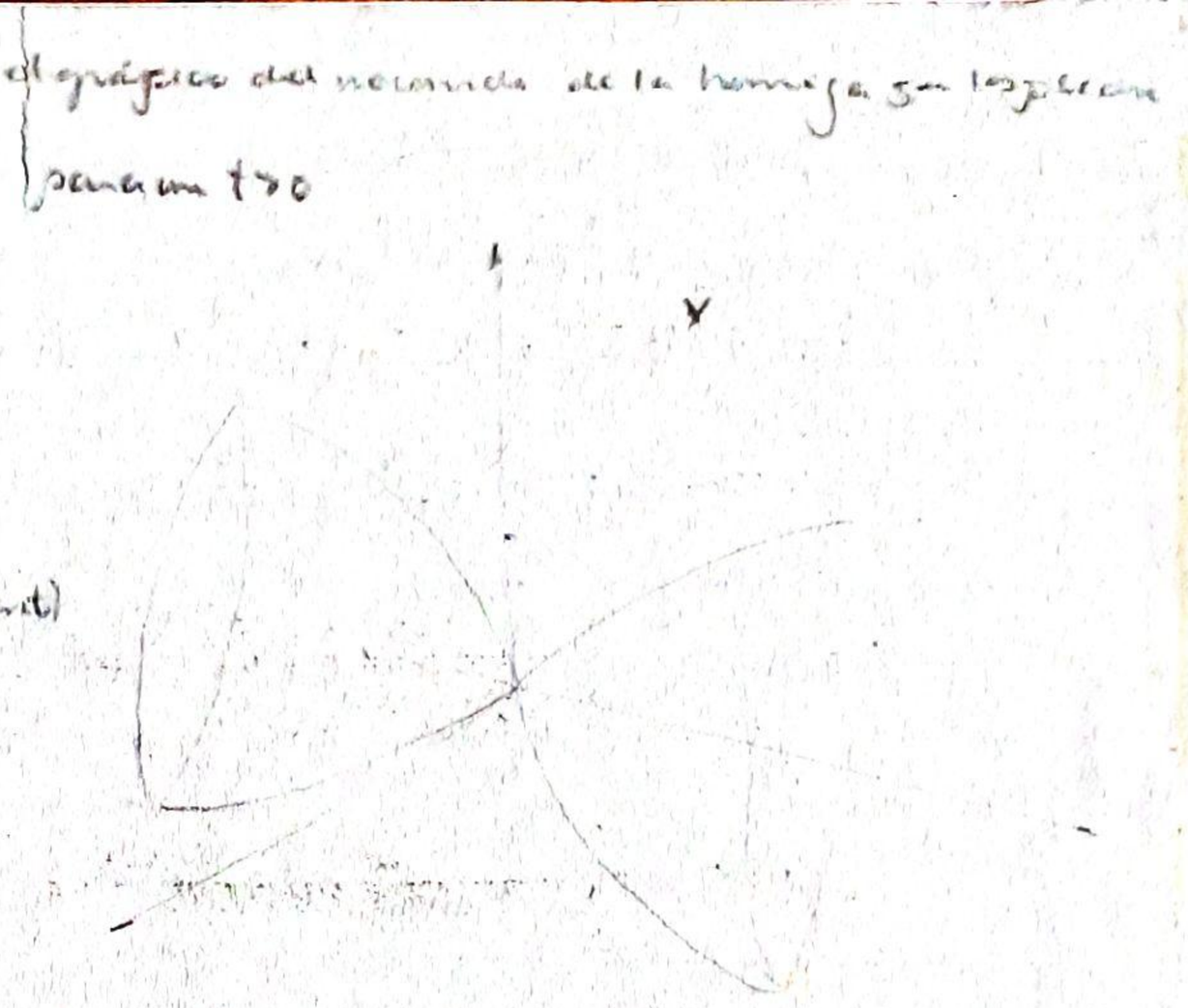
se encuentra sobre la dirección del eje y

Determinando el hélice (recorrido de la hormiga) en el cono: TABULANDO $t > 0$

t	$x = e^{-t}\cos t$	$y = \frac{1}{e^t}$	$z = e^{-t}\operatorname{sen} t$
0	1	1	0
$\pi/2$	0	$e^{-\pi/2}$	$e^{-\pi/2}$
π	$-e^{\pi}$	$e^{-\pi}$	0
$3\pi/2$	0	$e^{-3\pi/2}$	$-e^{3\pi/2}$
2π	$e^{-2\pi}$	$e^{-2\pi}$	0

-1 0 1

→ hacia atrás del punto A



Para los planos P_O, P_N, P_R

Sea $\vec{f}(t) = (e^{-t}\cos t \;,\; \frac{1}{e^t} \;,\; e^{-t}\operatorname{sen} t)$

$$f'(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\operatorname{sen} t \;,\; -e^{-t} \;,\; -e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t)$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{3e^{-2t}}$$

Se evalua en $t = 3\pi/2$

el vector tangente unitario: $T(t) = \dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$: Hallar de manera similar $T(3\pi/2)$

el vector normal unitario: $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, Hallar de manera similar $N(3\pi/2)$

el vector BINORMAL: $B(t) = T(3\pi/2) \times N(3\pi/2)$

Para hallar un plano, debe tener un punto FIJO

$$\vec{f}(3\pi/2) = (x_0, y_0, z_0) = (0 \;,\; e^{-3\pi/2} \;,\; -e^{-3\pi/2})$$

P_O : $(x - 0 \;,\; y - e^{-3\pi/2} \;,\; z + e^{-3\pi/2})$, $B(3\pi/2) = 0$

para $t < 0$

t	x	y	z
-2π	$e^{2\pi}$	$e^{2\pi}$	0
$-3\pi/2$	0	$e^{3\pi/2}$	$e^{3\pi/2}$
$-\pi$	$-e^{\pi}$	e^{π}	0
$-\pi/2$	0	$e^{\pi/2}$	$e^{\pi/2}$
0	1	1	0

Problema tipo 2 practica:

Discutir y graficar la Ecuación

$$(r^2 \operatorname{sen}\theta + r^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\phi - r^3\cos^2\phi$$

Sol:

Puede presentarse dos casos

Sea la transformación

$$\begin{cases} T:(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,\phi) & \text{coordenadas esféricas} \\ \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \quad \theta = \arctan(y/x),\ \phi \\ T^{-1}:(r,\theta,\phi) \longrightarrow (x,y,z) \\ \quad x = R\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \quad y = R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \quad z = R\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} T:(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,z) & \text{coordenadas cilíndricas} \\ \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \quad \theta = \arctan(y/x) \\ T^{-1}:(r,\theta,z) \longrightarrow (x,y,z) \\ \quad x = r\cos\theta \\ \quad y = r\operatorname{sen}\theta \\ \quad z = z \end{cases}$$

Se observa que la ecuación:

$$r^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi - r^3\cos^2\phi = 0$$

$$r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi - r^2\cos^2\phi = 0$$

$$r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + (r\cos\theta\operatorname{sen}\phi)^2 - (r\cos\phi)^2 = 0$$

$$y + (x)^2 - (z)^2 = 0$$

Se observa en la ecuación en coordenadas esféricas

Pasos para discutir gráfica:

1) Intersección con los ejes coordenados

2) Trazos con respecto al plano

□ $xy,\ z=0 \rightarrow y + x^2 = 0 \hookrightarrow x^2 = -y$

□ $yz,\ x=0 \rightarrow y = z^2$

□ $xz,\ y=0 \rightarrow x^2 - z^2 = 0$

$(x+z)(x-z)=0$

dos rectas $\begin{cases} x = z \\ x = -z \end{cases}$

3) Secciones planas

□ $xy,\ z=k \rightarrow y + x^2 - k^2 = 0$

$x^2 = -(y - k^2)$

$V = (0, k^2, k)$

$(y-k) = \frac{1}{-4}(x-h)^2$ $\quad p = -1/4 < 0$, ∥ eje y

□ $xz,\ y=k \rightarrow k + x^2 - z^2 = 0$

$x^2 - z^2 = -k \rightarrow k = z^2 - x^2$

$\frac{y^2}{-k} - \frac{z^2}{-k} = 1$ $\quad y = -\frac{z^2}{k} - \frac{x^2}{k}$

No pasa por el origen

$C(0,k,0)$

$a = \pm\sqrt{k}$ en z

$b = \pm\sqrt{k}$ en y

□ $yz:\ x=k \hookrightarrow y + k^2 - z^2 = 0$

$z^2 = y + k^2$

$V(k, -k^2, 0)$

Extensión

4) Simetría

en y

□ xz

□ yz

Analizando la extensión:

apartir de ptos ① ② y ③

o analizo el valor k donde no hay variables x, y, z y con ecuaciones:

Continuo la curva: Parametrización de curva

1ra Practica Calificada 2015 - 1

① Discuta el grafico de la superficie de ec

$$r^2(\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi - 4\cos^2\phi) = 25$$

② Halle la ec. de la superficie cilindrica cuya directriz esta en el plano $y=-2$, y tiene por ecuación

$$r^2 = 4r(\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta) + 6 = 0$$

y la generatriz es perpendicular al plano que pasa por la interseccion de los planos $x+y-z=2$, $2x-y+5z=1$ y el punto $(2,1,1)$

Se toma a r en el plano x

$x = r\cos\theta$
$y = y$
$z = r\operatorname{sen}\theta$

$r = \sqrt{x^2+z^2}$

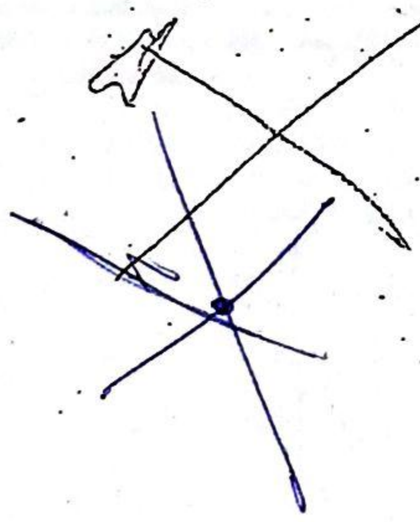
③ Parametrizar por longitud de arco:

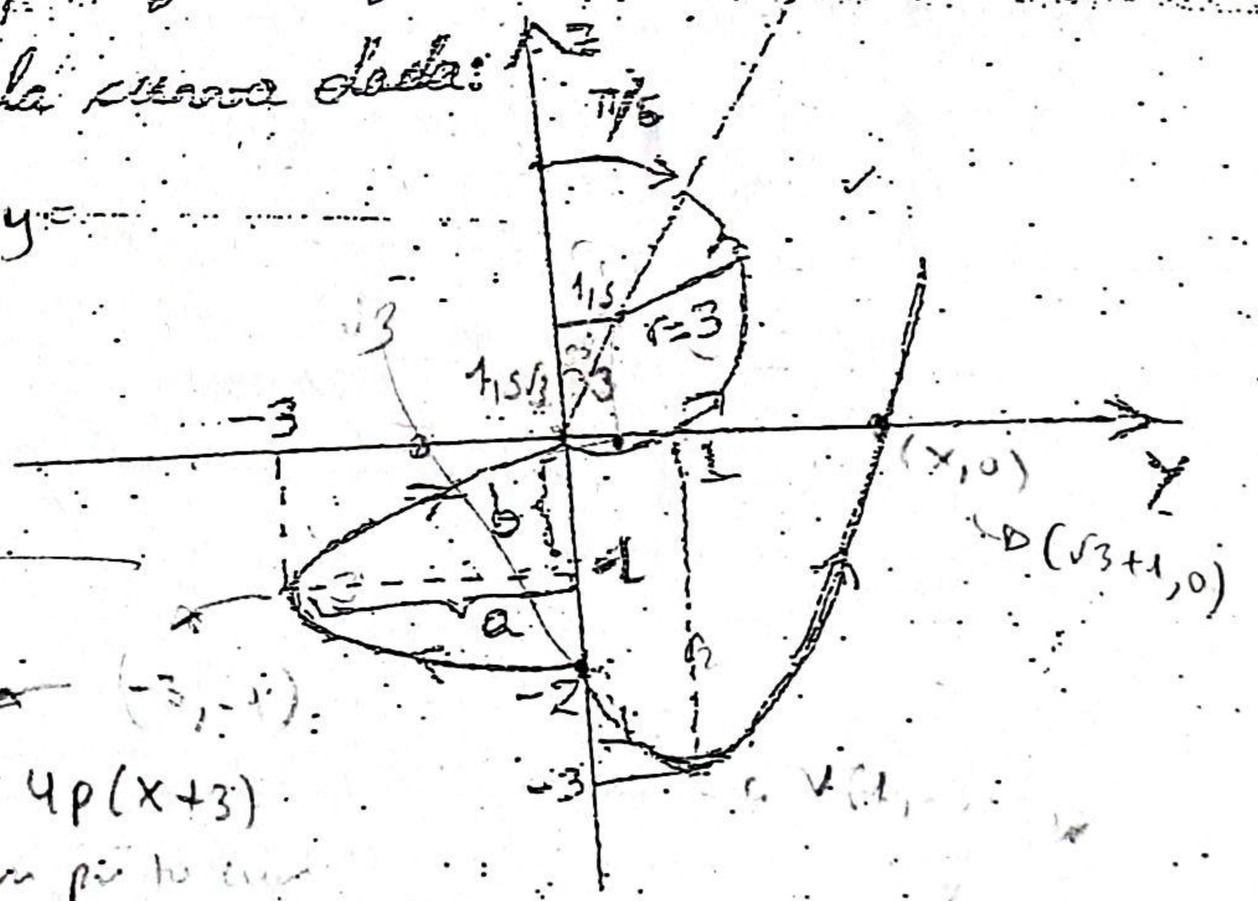
$$y^{2/3} + z^{2/3} = a^{1/2}, \quad x = 3/4, \quad a > 0$$

④ Hallar $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ los planos osculador, normal principal y rectificante para $y = a^{1/2}$

⑤ Controlar la curva dada:

$y =$





$(-3,-1)$:

$(y+1)^2 = 4p(x+3)$

hacer p en un pto de la curva

en $(0,-2)$:

$1 = 4p(3)$

$p = 1/12$

La ecuación queda:

$(y+1)^2 = \frac{1}{3}(x+3)$

$y = t$

$x = 3(y+1)^2 - 3$

t	x	y
0	0	0
-1	3	-2
-2	0	-2

$t \in [-2, -1]$

t	x	y
0	0	-2
1	1	-3
$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{3}+1$	0

en x en $(x,0)$:

$(x-1)^2 = 3$

$x = \sqrt{3}+1$

$(x-1)^2 = 4p(y+3)$

$(2,0)$

$p = 1/4$

$(x-1)^2 = (y+3)$

$x = t$

$y = (x-1)^2 - 3$

$y = (t-1)^2 - 3$

$f(t) = (t, (t-2)^2 - 3) \to t \in [0, \sqrt{3}+1]$

EXAMEN PARCIAL DE ANÁLISIS III 2015-I

(2) Grafiquen la imagen de:

$$\vec{g}(t) = (-2t, -3\,\text{sen}(-t), 2\cos(-t)), \quad \forall t \leq 0$$

y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el siguiente punto del plano YZ

(3) Un contaminante debe de cumplir según las ecuaciones:

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \,\text{sen}\, t, \quad z = e^t$$

Hallar los vectores unitarios $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, los planos osculador, normal y rectificante, para $t = 0$.

(3) Parametrizar la curva de ecuación:

$$a^{1/3} y^{2/3} + a^{1/3} z^{2/3} = a^{2/3}, \quad x = 3, a > 0$$

además hallar un vector tangente a dicha curva para un parámetro de valor $\pi/4$

(4) Determinar si existe límite de la función vectorial del gráfico:

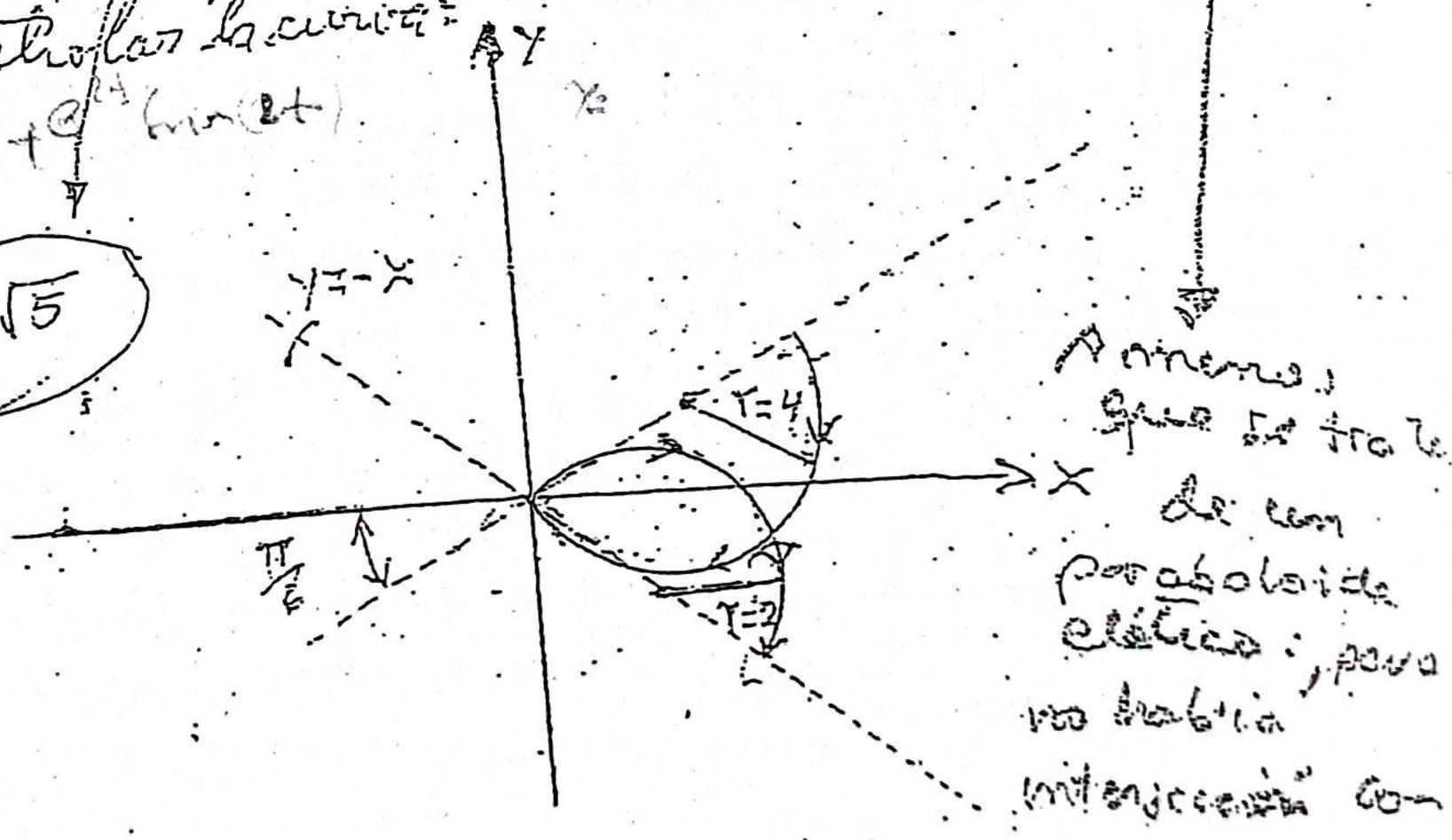
3. 1ª PRÁCTICA CALIFICADA MAT. III 2016-A LEON

1) Discuta el grafico de la superficie de ecuación:
$2r^2\sin^2\theta - 3r^2\sin^2\theta + r^2(5-3\cos^2\theta)\cos^2\phi + 2\sqrt{3}r\sin\theta\cos\phi - 4 = 0$
y determine la ecuación de la curva de intersección de la superficie con el plano $y = -\sqrt{3}$, la generatriz es paralela a la recta que pasa por los puntos:
$L_1: \frac{x-\sqrt{3}+2}{3} = \frac{y+\sqrt{5}-3}{2} = \frac{z-1}{1}$
$L_2: A(2,Y,2) = (\sqrt{3}+2, 1+\sqrt{3}, \sqrt{6}) + \lambda(3,2,1)$ / $z = \sqrt{5}$
Bosquejar grafico.

2) Hallar la ecuación de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es: $r^2 + r^2(2+3\cos^2\theta) + 12r\cos\theta + 6r\sin\theta = 0$
en el plano $y = \sqrt{5}$ y grafique el curva. Bosquejar grafico.
$\left(4\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\cos\theta = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3) Investigando que clase de superficie representa la ecuación dada en coordenadas esféricas:
$x = \frac{1}{2}e^{2t}\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$, $y = -e^{2t}\sin\left(2t-\frac{5\pi}{2}\right)$, $z = \frac{e^{2t}}{\sqrt{6}}$
grafique la trayectoria de esta partícula y la superficie parametrizada por la partícula mencione

4) Calcular la curva:
$x = 1+e^{t}\sin(2t)$



Es de una parabola elíptica; pero no habría intersección con el plano $y=\sqrt{5}$ y el p.e.

16 de Mayo Viernes 2019

Practica Domiciliaria ⟶ se presenta el jueves

1. Discutir la grafica de la superficie de ecuación

$$2r^2\cos^2\theta - r^2\cos^2\phi\,(5 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 6r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi + 3$$

2. Hallar la ecuación de superficie cilindrica cuya DIRECTRIZ es la seccion plana:

$$\begin{cases} 2r^2\operatorname{sen}^2\phi - 3r^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2(3\operatorname{sen}^2\theta + 2)\cos^2\phi \\ -2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Y la generatriz es ORTOGONAL al plano que contiene a los puntos (1,2,3) (2,-1,3) (-1,1,2)

Bosquejar el grafico

3. Hallar la Ecuación de la superficie cónica cuya directriz es

$$\begin{cases} r^2 + r^2(2\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos^2\theta) + 12r\cos\theta + 6r\operatorname{sen}\theta = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Y el vértice el punto $(2\sqrt{3}, -\pi/4, \arccos\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Bosquejar el gráfico

4. Bosquejar la trayectoria de una particula que se mueva según la ecuación:

$$x = -2\cos t\,,\ y = 4\operatorname{sen} t\,,\ z = 2t$$

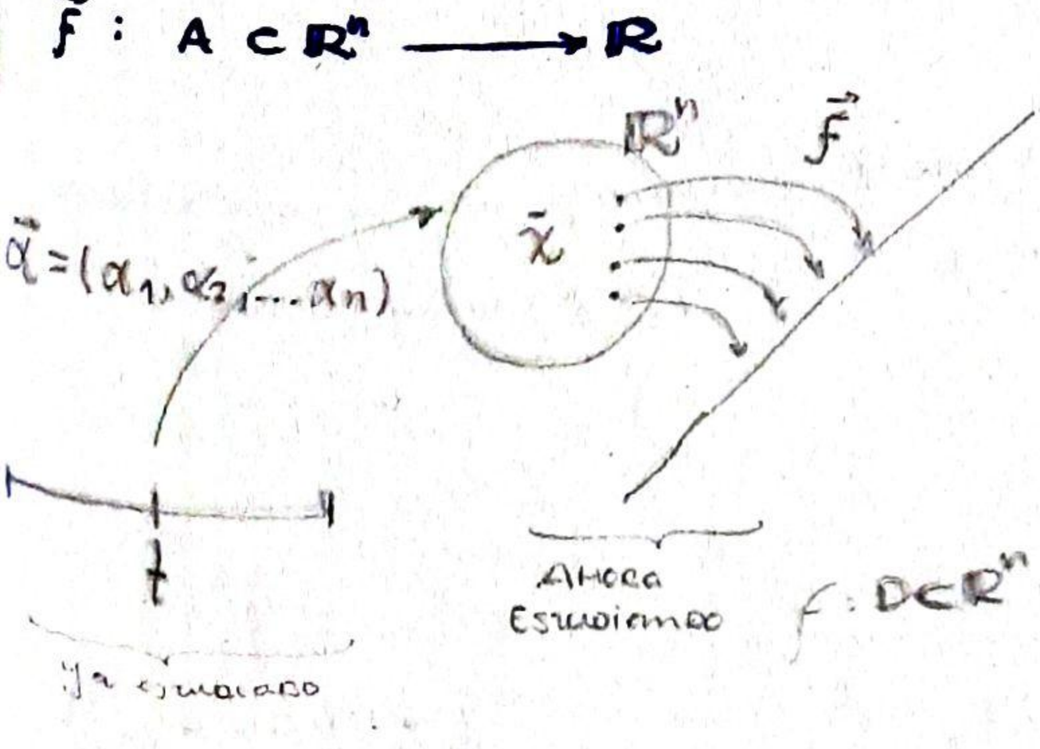
También hallar las ecuaciones de la recta Tangente a la trayectoria cuando se intersecta la superficie

$$r^2(3\cos^2\theta + 1)\operatorname{sen}^2\phi - \pi r^2\cos^2\phi = 4$$

Funciones Reales de Varias Variables

Aplicación de vectores a número

$$\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$



Def: Son funciones cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R}^n$ y cuyo rango esta en $\mathbb{R}$ (es decir $\forall \vec{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$ $\exists$ un $y \in \mathbb{R} / y = f(\vec{x})$)

ejemplo 1:

$$f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(\vec{x}) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Ó $f(\vec{x}) = z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

De acuerdo a la definición:

$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \to 25 \geq x^2 + y^2$

Ó $x^2 + y^2 = 5^2 \longrightarrow x^2 + y^2 \leq 25$

$z^2 \leq 25 \to -5 \leq z \leq 5$

Ran

$z \in [0, 5]$

De la superficie cuadrica:

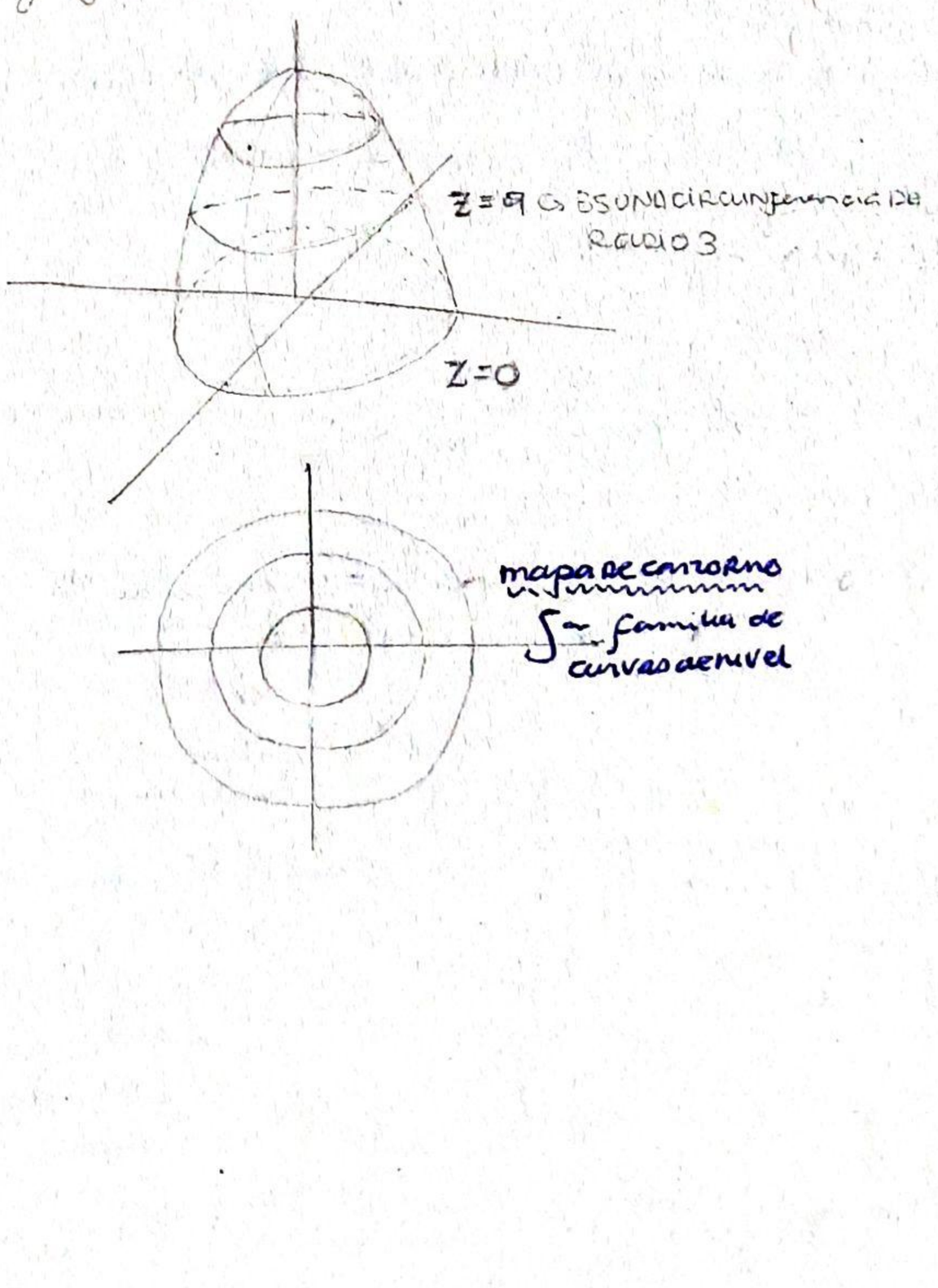
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

1. Curva de nivel

Def: es el conjunto de puntos de f tal que $f(\vec{x}) = K$ Es una familia, es decir Cono familia

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{x}) = K \text{ como familia}\} \quad z = K$$

graf del ejemplo 1:



Ejemplo 2:

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = x + y^2$

Hallando la curva de nivel

$D_f = \mathbb{R}^2$

$R_f = \mathbb{R}$, $x + y^2 = K$, $K \in \mathbb{R}$ (mismo nivel)

"así es la forma de plantear"

Dado que:

$-y^2 = x - K$

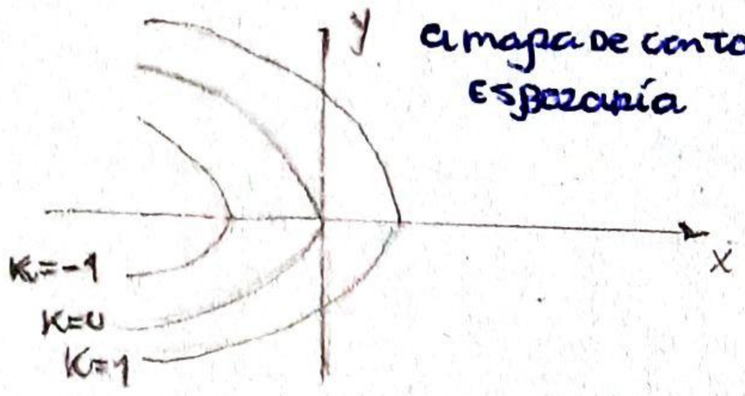
ESUNA FAMILIA DE parábola

Si $K=0$ G $-y^2 = x$

Si $K=1$ G $-y^2 = x+1$

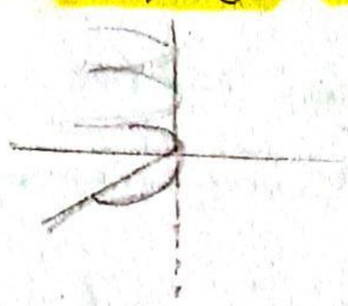
Si $K=-1$ G $-y^2 = x-1$

⋮



el mapa de contorno se esbozaría

Si $K=Z$, la grafica del ejemplo 2 sería:



"posiblemente un cilindro

2) Superficie de Nivel

$f: A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

El conjunto de puntos del Dominio de f / $\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(\bar{x}) = K \}$

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

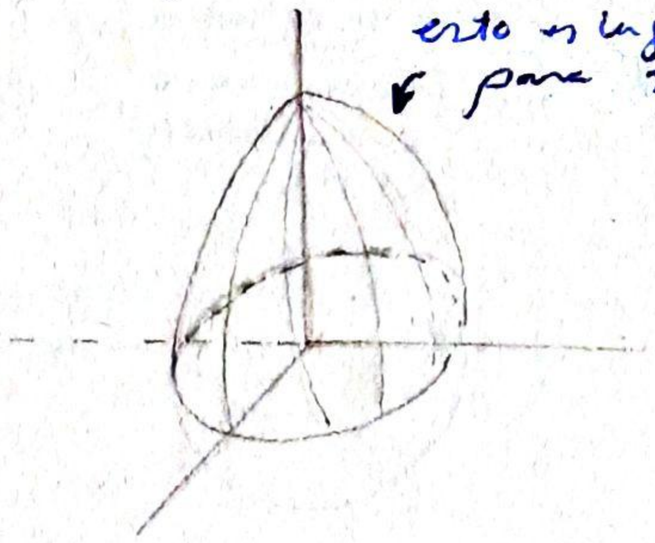
Ojo

Recta en $\mathbb{R}$ → grafica en $\mathbb{R}^2$, el Dominio proyecto en el plano

$x^2 + y^2 + z^2 = K$, $K \geq 0$ Hallamos la superficie de nivel así

G $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Si $K=1$

⋮



esto es la superficie de nivel para $x^2 + y^2 + z^2 = K$

↓

pero el grafo acarrearía

grafo: $\{ (\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^4$ pues $(x,y,z,f(\bar{x})) \}$

$\bar{x} = (x,y,z)$

difícil e imposible de graficar

3) Idea negrafo

$f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} \longrightarrow y = f(\bar{x})$

la gráfica de estas funciones son conjuntos de la forma:

$\{ (\bar{x}, f(x,y)) \;/\; \bar{x} \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \}$

ejemplo 3:

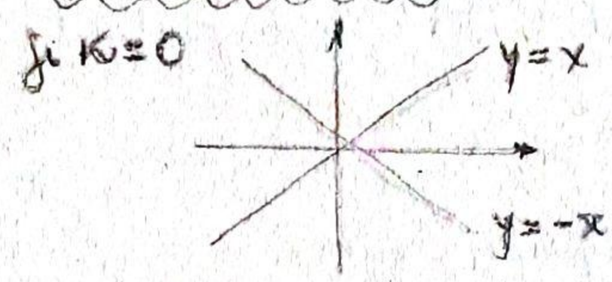
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f(\bar{x}) = y^2 - x^2$ ↓

"es un paraboloide hiperbólico" — (1)

→ Curva de Nivel

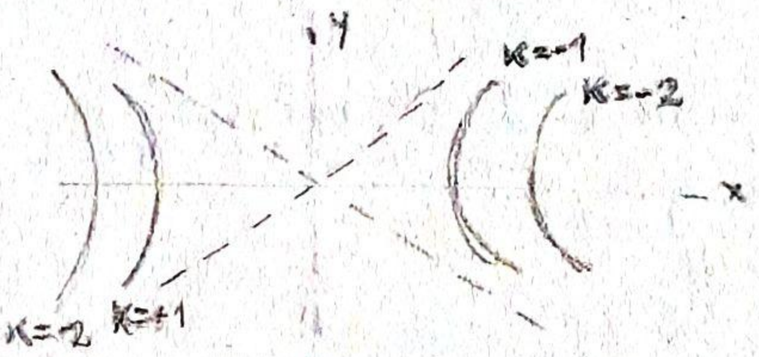
o $y^2 - x^2 = K$, $K \in \mathbb{R}$ — (2)

Si $K=0$



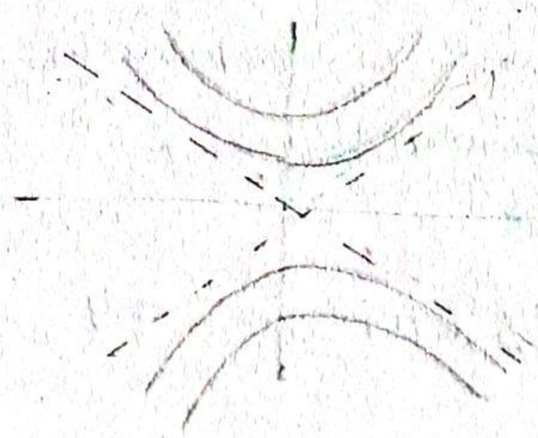
- $K < 0 \rightsquigarrow y^2 - x^2 < 0$

Esta es una hipérbola equilátera en el eje x



- $K > 0 \rightsquigarrow y^2 - x^2 > 0$

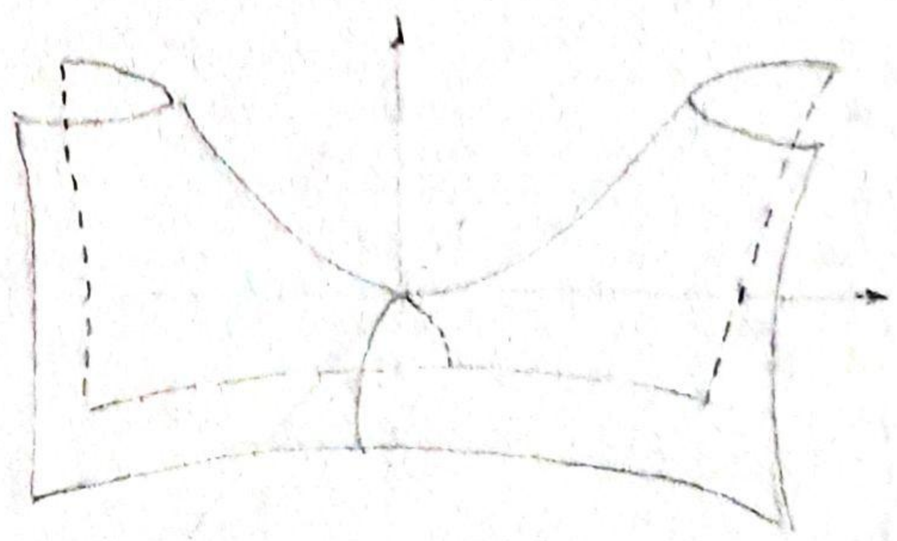
Es la una hipérbola equilátera en el eje y



- Intersecciones de (2) Sea $y^2 - x^2 = z = K$

$X=0 \to Z = y^2$, $Y=0 \to Z = -x^2$

A partir de (1) y los pasos seguidos de curva de nivel puedo suponer que superficie obtendré:



Como se viene dando el grafo es un conjunto

$\{ (\bar{x}, f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;/\; f(\bar{x}) = f(x,y) = K = z \}$

Implica que haya un Z

Resolver:

$f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2}$
$f(x,y) = xy$
$f(x,y) = 2x-y$
$f(x,y) = 2$

} Resolver

DADA $A \subset \mathbb{R}^2$ y el número de conjuntos reales $\mathbb{R}$.
Llamaremos funciones definidas en A con valores en $\mathbb{R}$ o funciones de A en $\mathbb{R}$ a toda correspondencia def que asocia a cada $(x,y) \in A$ a un único elemento de $z = f(x,y)$.

Escribimos trabajamos:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$

denotamos:

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \exists z \in \mathbb{R} \wedge f(x,y) = z \}$$
$$R_f = \{ f(x,y) \in \mathbb{R} / (x,y) \in D_f \}$$

ejemplos de funciones:

1) $f(x,y) = \sqrt{P(x,y)} \longrightarrow (x,y) \in D_f \leftrightarrow P(x,y) \geq 0$

2) función racional

$$f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \text{ como } (x,y) \in D_f \leftrightarrow Q(x,y) \neq 0$$
$$\leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{Q(x,y)=0\}$$

3) $f(x,y) = \ln(P(x,y)) \leftrightarrow (x,y) \in D_f \wedge P(x,y) > 0$

4) Funciones Trigonométricas

ejemplos de operaciones

$f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Con dominio respectivamente $A = D_f \wedge E = D_g$

Definimos:

① $(f \pm g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \ / \ \bar{x} \in D_f \cap D_g$

② $(f \cdot g)(\bar{x}) = f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \ / \ \forall \bar{x} \in D_f \cap D_g$

$\bar{x}$ es un par (x,y)

③ $(f/g)(x,y) = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} \ / \ \bar{x} \in D_f \cap D_g - \{(g(\bar{x})=0\}$

④ Composición de funciones

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} = (x,y) \in A$ la función f hace corresponder

$f(\bar{x}) \subset E$

Para cada $f(\bar{x}) \in E$
y la función g hace corresponder $g(f(\bar{x})) \in \mathbb{R}$

$$g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\bar{x} \longrightarrow g \circ f(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$$

$$D_{g \circ f} = \{ \bar{x} \in D_f \wedge f(x) \in D_g \}$$

Se da una breve explicación de límite por definición
lado pero no agrada a continuar estudiando →

Límite

Dado un radio $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ / $|(3x+y+z) - 8| < \varepsilon$
siempreque:

$0 < \|(x,y,z) - (1,2,3)\| < \delta$

$0 < \|x-1, y-2, z-3\| < \delta$

Se tiene

$0 < [(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2]^{1/2} < \delta$

Por la desigualdad Triangular tenemos:

$|3(x-1) + (y-2) + (z-3)| \leq |3(x-1)| + |y-2| + |z-3| < \varepsilon$

Admitemos

$$\left.\begin{array}{l} |x-1| < \delta \\ |y-2| < \delta \\ |z-3| < \delta \end{array}\right\} \quad 3\delta + \delta + \delta = 5\delta < \varepsilon$$

Reemplazando en la desigualdad Triangular

$\rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{5}$, en Hagen se usa la mayorización pero es mucho más largo

el límite demostrado es $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} 3x+y+z = 8$

Definimos:

$f: S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow R$. $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\bar{x}_0$ es un punto de Acumulación de S (llamamos "camino") entonces el límite de f cuando $\bar{x} \to \bar{x}_0$ sobre el conjunto S atravéz de S.

Se denota:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x) \quad . \quad \bar{x} \in S$$

• En esta definición si $Dom f \subset \mathbb{R}^2$ puede:

$$S = \{(x,y) / y = f(x) \text{ ó } x = g(y) \text{ ó } \begin{array}{l} x = h(t) \\ y = g(t) \end{array}$$

$$\text{ó } \left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$$

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})$ se convierte en límite de una variable
$\bar{x} \in S$

• Además si $Dom f \subset \mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{ (x,y,z) / \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{array}, t \in [a,b] \right\}$$

entonces $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})$ se convierte en límite
$\bar{x} \in S$ De variable t

Teorema: Regla de los Caminos

Sea $S_1 \cap S_2$ (Caminos), subconjunto de $\mathbb{R}^n$
y $\bar{x}_0$ un punto de acumulación de S_1 y S_2

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{x}_0 \\ \bar{x}\in S_1}} f(\bar{x}) = A \quad \wedge \quad \lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{x}_0 \\ \bar{x}\in S_2}} f(\bar{x}) = B$$

Si $A \neq B \Rightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})$ NO $\exists$

Si $A = B$ puede o no existir el límite

* Tal que al escoger un camino cualquiera $S_1, S_2, \ldots, S_n$ se debe obtener el mismo límite

Ejercicio 1:

Calcule el límite si existe

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

el $Dom f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Sol1: si $\bar{x} \to \bar{0}$ ($\bar{x}$ tiende a $\bar{0}$)

sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = Kx, K \in \mathbb{R}\}$

$$\lim_{\bar{x}\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\bar{x}\to(\bar{0})} \frac{x(Kx)}{x^2+K^2x^2}$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x^2K}{(K^2+1)x^2}$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{K}{K^2+1} = \frac{K}{K^2+1}$$

Como el valor del límite depende de K,
No ∃ límite, pues al reemplazar valores $\forall K \in \mathbb{R}$
se obtienen diferente de valores del límite
y no un único valor

ejercicio 2:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sea $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = Kx, K \in \mathbb{R}\}$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x(Kx)}{\sqrt{x^2+(Kx)^2}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{K^2+1}} \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x^2}{|x|}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{K^2+1}} \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} |x|$$

entonces $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} |x| = 0$ y para todo valor de $K \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{K}{\sqrt{K^2+1}} \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} |x|$ siempre

$\underbrace{\qquad}_{0}$

el límite será 0 para $\forall K \in \mathbb{R}$

∴ ∃ límite en $\bar{0}$

Son caminos $S_2, S_3, S_4 \in \mathbb{R}^2$ tal que
además $y = Kx$ podría también ocurrir
$y = Kx^3$ y en ambos casos el límite
debe ser el mismo

$S_5 = \{(x,y) : y = x^3\}$

Si el valor del anterior límite es CERO: se encontró el valor del límite y existe, se debe pasar a demostrar el límite por definición (obligatorio)

tenemos: ↑ hasta aquí por teorema de caminos y existe

$$\left\| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right\| < \varepsilon$$

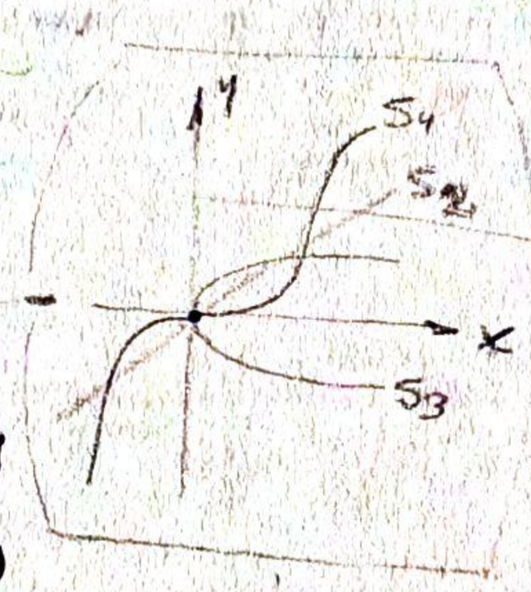
siempre que $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$

$$\left\| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Haciendo

$0 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \sim 2\|x\|\|y\| < x^2+y^2 \ldots(\alpha)$

Si no ∃ límite en el enunciado no debe demostrar



Continuidad:

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
y $\bar{x}_0 \in A$, se debe que f es continua en $\bar{x} \to \bar{x}_0$, si $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$
suponiendo que $\bar{x}_0$ es un punto de acumulación

OBS

f es continuidad en un punto x_0, siendo este un punto de acumulación

1) $x_0 \in D_f$ o $f(x_0) \exists$ } Solo si falla 1) se podría remover
2) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ }
3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ } Si falla aquí no se puede remover

↓

Dan límite ∃ a la igualdad no se cumple

Continuación ejercicio 2

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

$\to \delta < \varepsilon$

Ej1: Si $\bar{x} \to \bar{0}$ ($\bar{x}$ tiende a $\bar{0}$)

Sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = Kx, K \in \mathbb{R}\}$

$$\lim_{\bar{x}\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\bar{x}\to(\bar{0})} \frac{x(Kx)}{x^2+K^2x^2}$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x^2K}{(K^2+1)x^2}$$

$$= \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{K}{K^2+1} = \frac{K}{K^2+1}$$

Como el valor del límite depende de K,
No ∃ límite, pues al reemplazar valores $\forall K \in \mathbb{R}$
se obtienen diferente de valores del límite
y no un único valor

Si el valor del anterior límite es CERO: se encontró el valor del límite y existe. se debe pasar a demostrar el límite por definición (obligatorio)

tenemos: (por teorema de caminos y existe)

$$\left\| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right\| < \varepsilon$$

siempre que: $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$

$$\left\| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

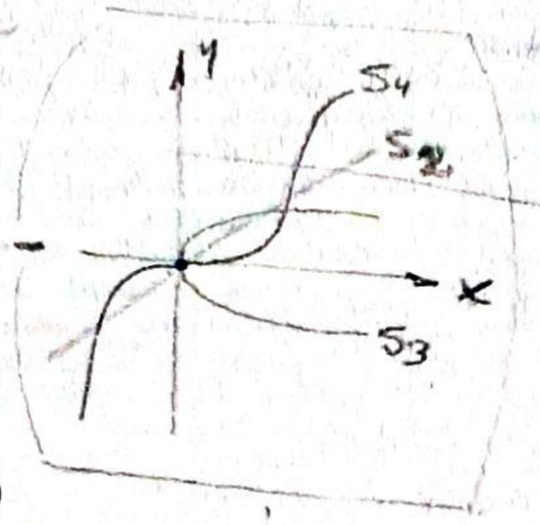
Haciendo

$$0 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 - 2\|x\|\|y\| < x^2+y^2 \quad \ldots(\alpha)$$

Si no ∃ límite en el ejemplo no se debe demostrar en ejercicios prácticos

Ejercicio 2:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



Sea $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = Kx, K \in \mathbb{R}\}$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x(Kx)}{\sqrt{x^2+(Kx)^2}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{K^2+1}} \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{x^2}{|x|} \quad (-|x|^2)$$

$$= \frac{K}{\sqrt{K^2+1}} \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} |x|$$

entonces $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} |x| = 0$ y para todo valor de $K \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{K}{\sqrt{K^2+1}} \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} |x|$ siempre

el límite será 0 (0) para $\forall K \in \mathbb{R}$

∴ ∃ límite en $\bar{0}$

Son caminos $S_2, S_3, S_4 \in \mathbb{R}^2$ tal que además $y = Kx$ podría también converge $y = Kx^3$ y en ambos casos el límite debe ser el mismo

$S_5 = \{(x,y) \, . \, y = x^3\}$

continuación de ejercicio 2

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

$\to \delta < \varepsilon$

Continuidad:

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
y $\bar{x}_0 \in A$, se debe que f es continua en $\bar{x} \to \bar{x}_0$, si $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$
supuesto que $\bar{x}_0$ es un punto de acumulación

OBS

f es continuidad en un punto x_0, siendo este un punto de acumulación

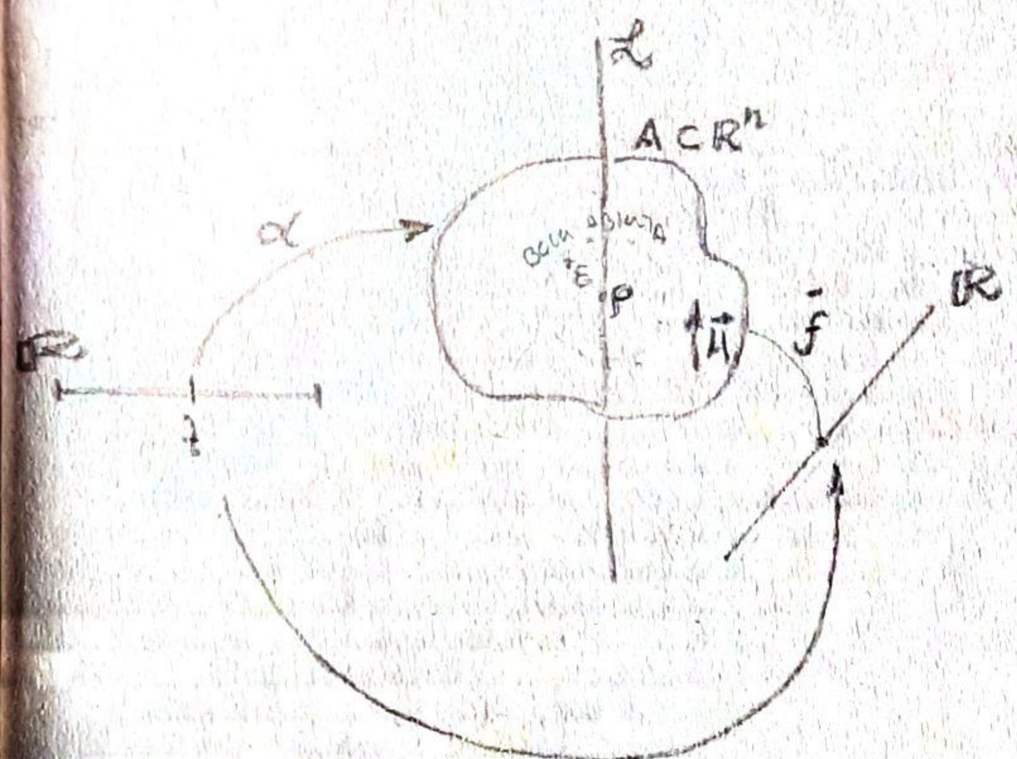
1) $x_0 \in D_f$ o $f(x_0)$ ∃ } Solo si falla 1) se podrá remover
2) ∃ $\lim_{x\to x_0} f(x)$
3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ } si falla acá no se puede remover

↓

Bien límite ∃ o la igualdad no se cumple

Derivada de funciones de varias variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables definido en el abierto A (Dominio)



$f \circ \alpha = g$

Tenemos un punto $P=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$. También tenemos un vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_n) \in \mathbb{R}^n$

Tenemos la recta $\mathcal{L} \parallel \vec{u}$ que pasa por P cuya ecuación es $L : \{P + t\vec{u} \,/\, t \in \mathbb{R}\}$

Como A es bola abierta y $P \in A \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(P,\varepsilon) \subset A$

Construyendo la función VECTORIAL

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = P + t\vec{u}, \; t \in \mathbb{R}$$

- Como el rango de α debe estar en $B(P,\varepsilon) \Rightarrow \alpha(t) = P + t\vec{u} \in B(P,\varepsilon)$ (Bola abierta del gráfico)
  - $\| P + t\vec{u} - P \| < \varepsilon$
  - $\|t\vec{u}\| < \varepsilon$, $\vec{u}$ es unitario
  - $|t| < \varepsilon \longrightarrow -\varepsilon < t < \varepsilon$ (contiene al Dominio de α)

Se ha generado la función importante

$$f \circ \alpha : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t))$$

($f \circ \alpha$: f compuesta con α)

Ahora la derivada de la función: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en el punto $P(x_1 x_2, \dots x_n)$ y en dirección del vector unitario $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$

Se llama **derivada direccional**, se denota

$D_{\vec{u}} f(P)$ y se define:

La derivada de la función compuesta es decir

$$D_{\vec{u}} f(P) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)$$

"La derivada direccional es una generalización de la derivada parcial"

Podemos visualizar la derivada como límite

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ \alpha)(0+h) - f(\alpha(0))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x(h)) - f(\alpha(0))}{h}$$

$$D_{\vec{u}} f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}$$

Particularmente $\begin{cases} f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, y_0) \longrightarrow f(x_0, y_0) = z_0 \end{cases}$

"Sendo $P = (x_0, y_0)$ e $\mu = (u_1, u_2)$, P, u estão interrelacionados"

La derivada direccional

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f[(x_0, y_0) + h(u_1, u_2)] - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- Si $\vec{u} = \vec{i} = (1,0)$

$$D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

↳ Se llama derivada parcial con respecto a X

Se denota:

$$D_i f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

- Si $\vec{u} = j = (0,1)$

$$D_{\vec{j}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

↳ Se llama derivada parcial con respecto a y

$$D_j f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$: se denota

ej: $f(x,y) = xy + xy^2 + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + y^2 \sim \text{"como si fuera y una constante"}$$

PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA DE CÁLCULO iii 2019-1 E.A. INGENIERÍA METALÚRGICA 9 DE MAYO 2019, PROF. FÉLIX LEÓN

RESOLUCIÓN EJERCICIO DEL GUEPARDO

0

Ejercicio del guepardo PC

$f(x) = (2\sin t, 4\cos t, t)$ esta es la ecuación de la normal

$f(x)$ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow f(x,y,z) = (2\sin t, 4\cos t, t)$

el doble enlace corresponde al angulo

Luego reconocido esta sobre la superficie $f(x,y,z)$ (el cual es un cilindro circular o elíptico).

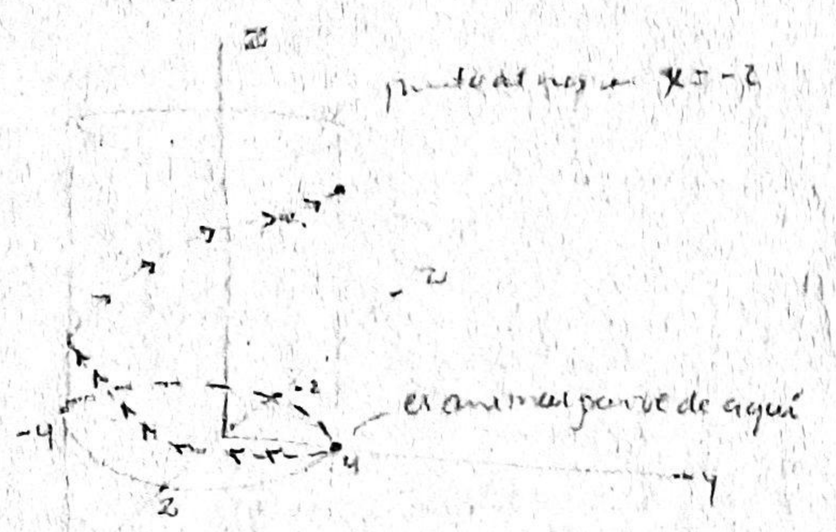
Se observa un cilindro elíptico

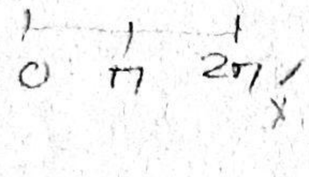
$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sin t \\ y &= 4\cos t \\ z &= t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{x^2}{2^2} &= \sin^2 t \\ \frac{y^2}{4^2} &= \cos^2 t \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad -(1)$$

$z = t$

Graf





Veamos el recorrido tabulando valores de t

t	$x = 2\sin t$	$y = 4\cos t$	$z = t$
0	0	4	0
$\frac{\pi}{2}$	2	0	$\frac{\pi}{2}$
π	0	-4	π
$\frac{3\pi}{2}$	-2	0	$3\pi/2$
2π	0	4	2π

La función vectorial usada tiene por trazo

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow f(t) = (2\sin(2t), 4\cos(2t), 2t)$

Superficie S (en coordenadas cilíndricas)

$y^2 + 4x^2 - 4z^2 = 4$: Hiperboloide de una hoja

tenemos que hallar la intersección de la anterior ecuación con la ecuación del cilindro elíptico para hallar el plano osculador, rectificante y normal de (1)

$$\begin{cases} 4x^2 + 16y^2 = 16 \\ y^2 + 4x^2 - 4z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 16 - 4z^2 = 4$$

$z = \pm\sqrt{3}$

$z = \pm\sqrt{3} = t_0$

Elegimos $z = \pm\sqrt{3}$

$\pi \longrightarrow 3.14$

$x \longrightarrow 1.57$

$x = \frac{1.57}{3.14} \cdot \pi = \frac{151}{314}\pi = \pi/2$

$t = \pm\sqrt{3} = t_0 = \pi/2$

Como $z = 2t = \frac{\pi}{2}$

$z = t = \frac{\pi}{4}$

dos pasos antes de la superficie

$$t_0 = \frac{\pi}{4} - \underbrace{2}_{\text{2 pasos antes}} = \frac{-7\pi}{4}$$

$\Rightarrow f(t_0) = f(-7/4\pi)$

$= f(t_0) = (2, 0, -7\pi/2)$

Acuerdo hallar la plano anterior paso

periodo, pasos antes

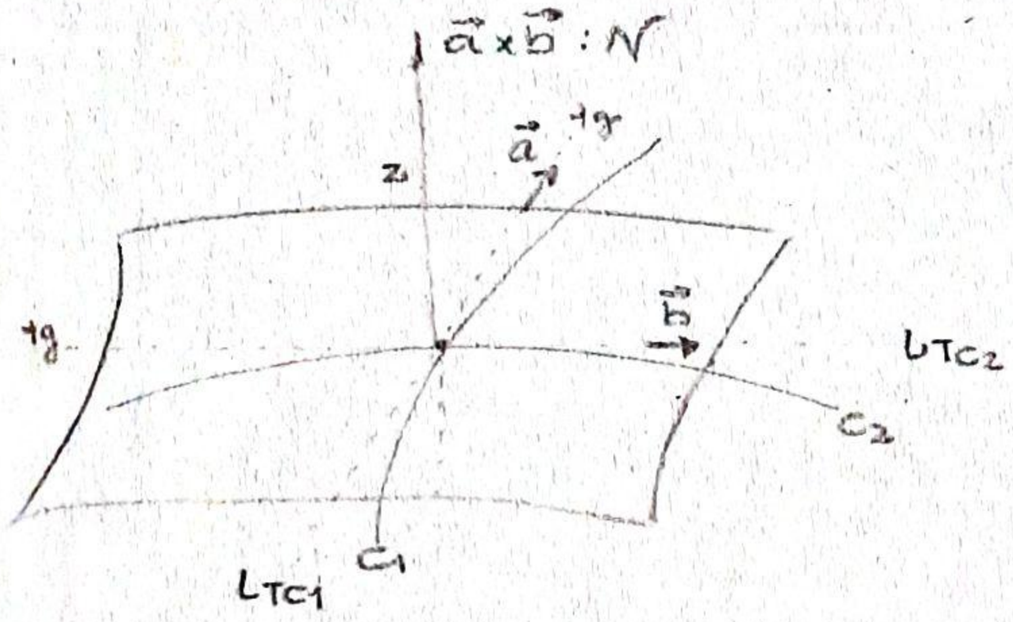
un paso 2π

dos pasos 4π

30 jueves de mayo

1. Interpretación geométrica de la derivada direccional

2. Recta tangente, normal y Ecuación del plano tangente



del cálculo I, recta tangente $\begin{cases} L: y-y_0 = m(x-x_0) \\ y-y_0 = \frac{dy}{dx}(x-x_0) \end{cases}$

2.1 Ecuación de la L_{TC_1}, L_{TC_2}

Plano XZ $\rightarrow y=0$

- $L_{TC_1}: z-z_0 = m(x-x_0)$, $y=y_0$

$$z-z_0 = \frac{d(f(x,y))}{dx}(x-x_0)$$

- $L_{TC_1}: z-z_0 = \frac{df}{dx}(x-x_0)$, $y=y_0$

- $L_{TC_1}: \frac{z-z_0}{\frac{df}{dx}} = \frac{x-x_0}{1}$, $y=y_0=0$ } ecuación simétrica de la recta

$\Rightarrow \vec{a} = \left(1, 0, \frac{df}{dx}\right)$

Plano YZ $\rightarrow x=0$

- $L_{TC_2}: z-z_0 = m(y-y_0)$, $x=x_0$

$$z-z_0 = \frac{df}{dy}(y-y_0)$$

- $L_{TC_2}: z-z_0 = \frac{df}{dy}(y-y_0)$, $x=x_0$

- $L_{TC_2}: \frac{z-z_0}{\frac{df}{dy}} = \frac{y-y_0}{1}$, $x=x_0=0$ } ecuación de la recta simétrica

$\Rightarrow \vec{b} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{dx}\right)$

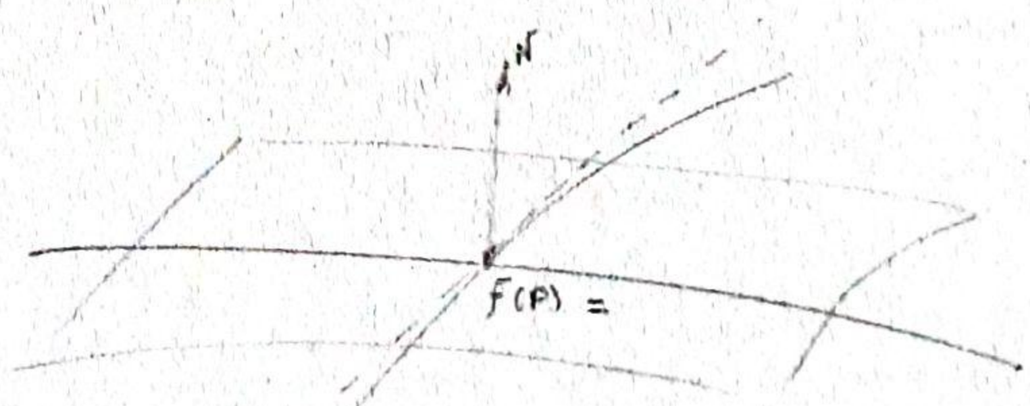
2.2 Recta NORMAL

$$\text{Normal } (N) = \vec{a}\times\vec{b} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)\times\left(0, 1, \frac{df}{dy}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$N = \vec{a}\times\vec{b} = \left(\frac{-\partial F}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Representación gráfica:



2.3 Plano Tangente:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot N = 0$$

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot\left(\frac{-\partial f}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1\right) = 0$$

ecuación del plano tangente

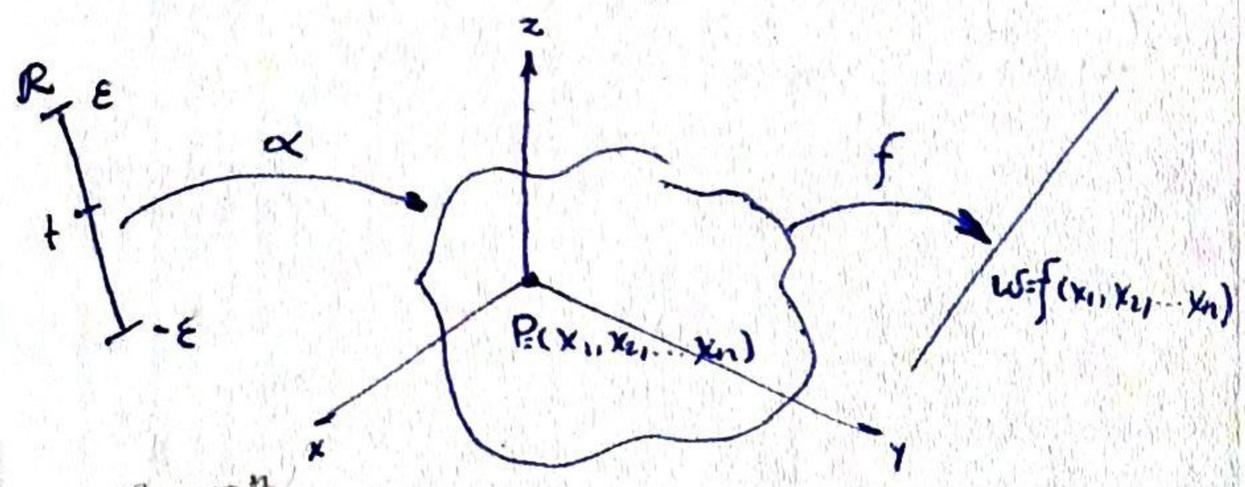
$$(x-x_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + (-1)(z-z_0) = 0$$

$\frac{x-x_0}{a_1}, \frac{y-y_0}{a_2}, \frac{z-z_0}{a_3}$; $a_2 = 1$; 0

30 Jueves 11 Mayo

$(x-x_0)\ y-y_0,\ z-z_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$



$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$t \to \alpha(t) = P + t\vec{u} = Df(P)\cdot\vec{u}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2, \dots x_n) \to f(x_1, x_2, \dots x_n) = w$

$$D_{\vec{u}} f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot(\mu_1, \dots \mu_n)$$

derivada direccional

$$D_{\vec{u}} f(P) = Df(P)\cdot\mu$$

$$D_{\vec{u}} f(P) = \left(\mu_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial f}{dx_2} + \dots + \mu_n \frac{\partial f}{dx_n}\right)$$

tenemos: $D_{\vec{u}} f(P) = \frac{\partial (f\circ\alpha)}{\partial t}(0) = Df(\alpha(0))\cdot\frac{\partial}{\partial t}\alpha(0) = Df(P)\cdot\vec{u}$

$$D_u F(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(\mu_1, \mu_2)$$

donde $\left(\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f$

gradiente de f

pero $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ operador NABLA

gradiente de f:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

generalizando

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2 \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) = w$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial x_n}\right) f$$

Ejemplo

$f(x,y) = x^2y - xy^2 + x - y$

$\vec{u} \parallel \vec{a} = (2,3)$

$P = (-1,4)$

Hallar $D_{\vec{u}} f(P)$, ∇f, Plano tangente

Sol:

Hallar derivada parcial, para hallar luego el vector direccional

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial (x^2y - xy^2 + x - y)}{\partial x} = 2xy - y^2 + 1 \to \frac{\partial f(-1,4)}{\partial x} = -23$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (x^2y - xy^2 + x - y)}{\partial y} = x^2 - 2xy - 1 \to \frac{\partial F(-1,4)}{\partial y} = 8$$

Hallar el vector unitario, en función de $\vec{a}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

derivada direccional

$$\Rightarrow D_{\vec{u}} f(P) = (-23, 8)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{-46}{\sqrt{13}} + \frac{24}{\sqrt{13}}$$

la derivada direccional en el punto $(-1,4)$

⇒ gradiente de f

$$\nabla f = \nabla f(-1,4) = (-23, 8)$$

⇒ Ecuación del plano tangente

$$f(P) = f(-1,4)$$

$$z_0 = f(P) = f(x_0, y_0) = f(-1,4)$$

$$\to z_0 = f(-1,4) = f(x,y) = x^2y - xy^2 + x - y$$

$$(-1)^2 4 - (-1)(4)^2 + (-1) - 4 = 15$$

$$z_0 = f(-1,4) = 15$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (-1, 4, 15)$$

Ecuación del plano tangente a la trayectoria

$$(x+1, y-4, z-15)\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, -1\right) = 0$$

$$(x+1, y-4, z-15)(-23, 8, -1) = 0$$

Rectas tangentes a la superficie

L_{T_1} $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0)$, $y = y_0$

L_{T_2} $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$, $x = x_0$

Repaso desde la última clase, ejercicios:

(I) Utilizando la definición de límite demostrar que:

- $\lim_{(x,y)\to(2,1)} (6x-2y) = 10$
- $\lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2$

(II) Dada la función definida por:

$$F(x,y) \;\forall (x,y)\neq(0,0) \text{ con } F(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$$

determinar el límite si existe cuando $(x,y)\to(0,0)$

(III) Sea la función definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{y^2+x^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

determine si f es continua en el punto $(0,0)$

Sol (III)

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2 = 2$,

demostración:

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2=2 \longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / \{0<|x-1|<\delta \wedge 0<|y-1|<\delta\} \longrightarrow |x^2+y^2-2|<\varepsilon$

Expresar $|x^2+y^2-2|$ en términos de $|x-1|, |y-1|$, esto es:

$\Leftrightarrow |x^2+y^2-2| = |x^2-1+y^2-1| = |(x+1)(x-1)+(y+1)(y-1)|$

$|(x+1)(x-1)+(y+1)(y-1)| \leq |x+1||x-1| + |y+1||y-1|$, desigualdad triangular

Agrupando

$|x^2+y^2-2| \leq |x+1||x-1| + |y+1||y-1|$ — ①

Sea $\delta_1 = 1 \longrightarrow |x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1$

$0<x<2$

(en libreta: tomar este valor → δ_1 acotada)

(Para hallar el intervalo para mayorizarlo que sabía → acotar el $|x-1|$ de la expresión)

" Tenemos que mayorizar: $1<x+1<3$

$-3<x+1<3$

$|x+1|<3$ ②

Análogamente: $|y-1|<1 \longrightarrow |y+1|<3$

Reemplazando ② en ①

$$|x^2+y^2-2| \leq |x+1||x-1| + |y-1||y+1|$$
$$< 3|x-1| + 3|y-1|$$
$$< 3\delta + 3\delta = 6\delta = \varepsilon \to \frac{\varepsilon}{6} = \delta$$

eligiendo $\delta^* = \min\{1, \varepsilon/6\}$

Setiene: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta^* = \min\{1, \varepsilon/6\}$

$0<|x-1|<\delta^* \wedge 0<|y-1|<\delta^* \Rightarrow |x^2+y^2-2|<\varepsilon$

Esto demuestra que $\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+y^2 = 2$.

Sol (II)

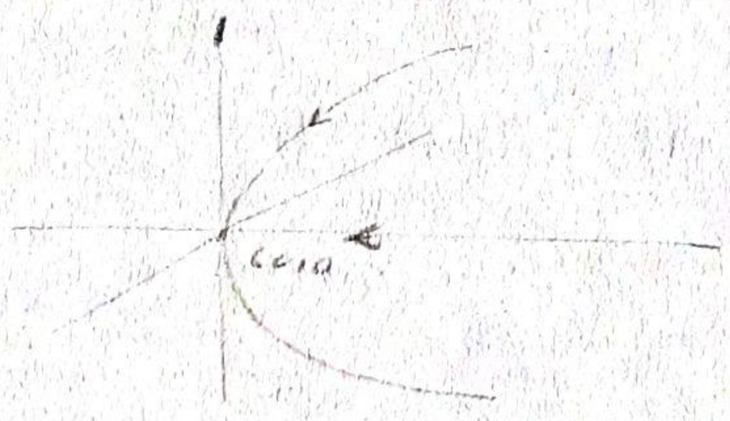
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, \forall (x,y)\neq(0,0)$

- camino S_1:

$S_1 = \{(x,y) / y=0\}$ = eje x

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0)$

$\bar{x} \in S_1$ → coherencia



$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-0}{x^2-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$

- Camino S_2

$S_2 = \{(x,y) / y=x\}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^3}{x^2+x^2} = 0$

- Camino S_3:

$S_3 = \{(x,y) / y=kx, k\in\mathbb{R}\}$

tenemos

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3-k^3x^3}{x^2+k^2x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1-k^3)}{x^2(1+k^2)}$

$= \frac{1-k^3}{1+k^2} \lim_{x\to 0} x = 0 = 0$

$\therefore$ De S_1, S_2, S_3 tenemos que 0 es el posible límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, PASAREMOS A DEMOSTRAR POR DEFINICIÓN: Todos estos pasos generales y tips en la demostración del límite a examen

"podríamos plantear más caminos pero al plantear 3 ya vemos el posible límite, luego de eso se pasa a demostrar por def de límite

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; 0 < |x| < \delta \wedge 0 < |y-0| < \delta \longrightarrow \left| \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$, Expresar implicación de $|x|<\delta \wedge |y|<\delta$

entonces:

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \text{ . de la desigualdad triangular}$$

$$\frac{|x^2||x|}{x^2+y^2} + \frac{|y^2||y|}{x^2+y^2} = \frac{x^2|x|}{x^2+y^2} + \frac{y^2|y|}{x^2+y^2}$$

Como $\begin{cases} x^2 \leq x^2+y^2 \\ y^2 \leq x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \frac{(x^2+y^2)|x| + (x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |x|+|y|$

Por tanto: $\left| \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \underbrace{|x|}_{\delta} + \underbrace{|y|}_{\delta}$

$\delta + \delta = 2\delta = \varepsilon \rightarrow \delta = \varepsilon/2$

Elegimos $\delta = \varepsilon/2$

Dada $\varepsilon > 0, \exists\, \delta = \varepsilon/2 \;/\; 0 < |x| < \delta_1 \wedge 0 < |y| < \delta_2 \Rightarrow \left| \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

Sol (III)

Para la continuidad en un punto se debe cumplir las 3 condiciones:

1) $f(P_0)$ existe
2) $\lim_{(x,y)\to P_0} f(x,y) \exists$
3) $\lim_{(x,y)\to P_0} f(x,y) = f(P_0)$

Si falla ① y ③ es removible

Si falla ③ es porque falla ② y el límite es NO removible

en el ejercicio se tiene que cumple:

1) $f(0,0) = 0$ entonces $\exists$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{y^2+x^4}$

Escojendo caminos

$S_1 = \{(x,y) / y=0\}$

$\hookrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(0)}{0+x^4} = 0 = L_1 \;,\; \bar{x} \in S_1$

$S_2 = \{(x,y) / y=x^2\}$

$\hookrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2)}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} = L_2 \;,\; \bar{x} \in S_2$

③ Se observe:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2} = 0$ no se cumple el teorema conc

Jueves 6 de Junio 2019

1. Derivada Implícita

a) $f(x,y) = 0 \hookrightarrow x^2 + xy + y = 2$

$x^2 + xy + y - 2 = 0$

$f(x,y) = 0$

derivando en respecto a x

$f'(x,y) = 2x + y + xy' + y' = 0$

$2x + y + y'(x+1) = 0$

$y' = -\frac{(2x+y)}{x+1}$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{(2x+y)}{x+1}$

b) $f(x,y,z) = 0$

$z = f(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$

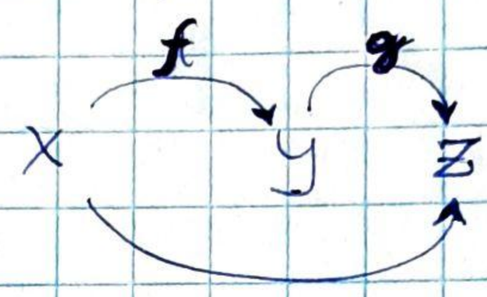
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\partial f / \partial}{\partial f / \partial z}$

ejem:

$\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2} + \arctan(x^2+y^2+z^2+t^2) = 0$

hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$

2. Derivada de la función compuesta: (Regla de la cadena)



$y = f(x)$, $z = g(y)$

$\Rightarrow z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (g \circ f)(x)}{\partial x}$

$= \frac{\partial (g \circ f)(x)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$

$= \frac{\partial g(f(x))}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$

6 de junio 2019

$\frac{dz}{dx} = d\,f \circ f(x)$ ⇒ Regla de la Cadena

$= d\,g(f(x)) \cdot \frac{dy}{dx}$ ⇒ derivada implícita

$= d\,g(f(x)) \cdot \frac{df}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

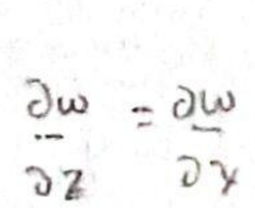
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

Sea $z = f(x,y)$, $y = h(t)$, $x = g(t)$

$\rightarrow z = f(x,y) = f(g(t), h(t))$

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Rama



$\Rightarrow w = f(u,v) \begin{cases} u = (x,y) \\ v = (y,z) \end{cases}$

$w = f(u(x,y), v(y,z))$

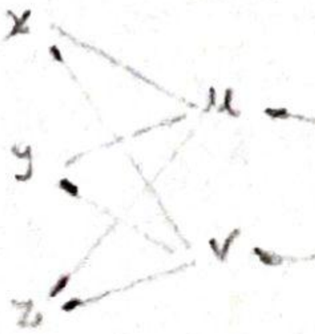
$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$

$\frac{\partial w}{\partial x_0} \; \frac{\partial w}{\partial u_0} \; \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial w}{\partial x_0}$

$\frac{\partial w}{\partial u_0} \; \frac{\partial u}{\partial y_0} \; \frac{\partial w}{\partial v_0} \; \frac{\partial v}{\partial y_0} = \frac{\partial w}{\partial y_0}$

$\frac{\partial w}{\partial v_0} \; \frac{\partial v}{\partial z_0} = \frac{\partial w}{\partial z_0}$

:L



$w = f(x\,y\,z) = m$

$(z\,h\,x)f = m$

$w = f(u,v)$

$(x\,m)f = m$

$\begin{cases} u(x\,y\,z) \\ v(x\,y\,z) \end{cases}$

$\frac{\partial w}{\partial x_0} \; \frac{\partial u}{\partial x_0} \; \frac{\partial x}{\partial u_0} \; \frac{\partial w}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial w_0}$

$\frac{\partial w}{\partial u_0} \; \frac{\partial u}{\partial y_0} \; \frac{\partial y}{\partial u_0} \; \frac{\partial w}{\partial v_0} \; \frac{\partial v}{\partial y_0} = \frac{\partial y}{\partial w_0}$

$\frac{\partial w}{\partial v_0} \; \frac{\partial v}{\partial z_0} = \frac{\partial z}{\partial w_0}$

$\frac{\partial w}{\partial z_0} \; \frac{\partial z}{\partial \lambda_0} \; \frac{\partial \lambda}{\partial m_0} = \frac{\partial w}{\partial m_0}$

$\frac{\partial w}{\partial \lambda_0} \; \frac{\partial \lambda}{\partial y_0} \; \frac{\partial y}{\partial m_0} + \frac{\partial w}{\partial \eta_0} \; \frac{\partial \eta}{\partial y_0} \; \frac{\partial y}{\partial m_0} = \frac{\partial y}{\partial w_0}$

$\frac{\partial w}{\partial \lambda_0} \; \frac{\partial \lambda}{\partial x_0} \; \frac{\partial x}{\partial m_0} + \frac{\partial w}{\partial \eta_0} \; \frac{\partial \eta}{\partial x_0} \; \frac{\partial x}{\partial m_0} + \frac{\partial w}{\partial \xi_0} \; \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \; \frac{\partial x}{\partial m_0} = \frac{\partial x}{\partial w_0}$

Ejemplo: Tipo examen - Fija

Si $w = x \cdot f(x+y, x-yz)$, $w = x \cdot f(\alpha, \beta)$

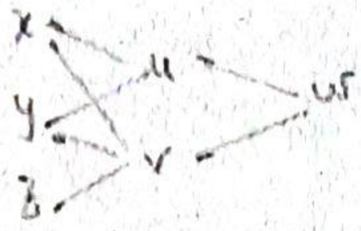
$u = \alpha = x+y$

$v = \beta = x-yz$

Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$

Sol: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-yz \end{cases} \Rightarrow w = x \cdot f(u,v)$

Plantear la malla posible.



x
y
z

Entonces:

- $\frac{\partial w}{\partial x} = f(u,v) + x \cdot \frac{df(u,v)}{dx}$

$= f(u,v) + x \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right]$

Tenga que $u = x+y \rightarrow \partial u = 1 \cdot \partial x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1$

↳ al derivar función como constante

$v = x - \underbrace{yz} \rightarrow \partial v = (x \cdot yz)\partial x \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 1$

↳ al derivar lo marcado como constante

$= f(u,v) + x \left[\frac{\partial w}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 1 \right]$

$= f(u,v) + x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot x$

- $\frac{\partial w}{\partial y} =$

$w = x \cdot f(u,v)$ ⇒ derivada de un producto

$\frac{\partial w}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_0}$

$\frac{\partial w}{\partial y_0} = \frac{\partial (x \cdot f(u,v))}{\partial y_0}$

$\frac{\partial w}{\partial y_0} = \frac{\partial x}{\partial y_0} f(u,v) + x \cdot \frac{\partial f(u,v)}{\partial y_0}$

Como x es función independiente $= 0$

$\frac{\partial w}{\partial y_0} = x \cdot \frac{\partial f(u,v)}{\partial y_0}$

$\frac{\partial w}{\partial z_0} = x \cdot \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial y_0} \right]$

$\frac{\partial u}{\partial y_0} = 1$

$h(x) = x$

$h(1+0) = 1$

$u = x+y$

$\frac{\partial v}{\partial y_0} = -z$

$v = x - yz$

$\frac{\partial w}{\partial y_0} = x \cdot \frac{\partial f(u,v)}{\partial v_0} \cdot -z$

$\frac{\partial w}{\partial z_0} = x \cdot \frac{\partial f(u,v)}{\partial v_0} \cdot -y$

$\frac{\partial v}{\partial z_0} = -y$

$h(z) = z$

$h(1-0) = z$

$v = x - yz$

• $\frac{\partial w}{\partial z}$ = Tolgire la rama ya observe que se relaciona a z pero v si tiene z

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x \cdot \frac{\partial f(u,v)}{\partial z} = x\left(\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -xy\frac{\partial w}{\partial v}$$

$v = x - yz$

$\partial v = (x - yz)\partial z$

$0 - y\dot{z}$

cualquiera

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -xy$$

Ejercicio 2:

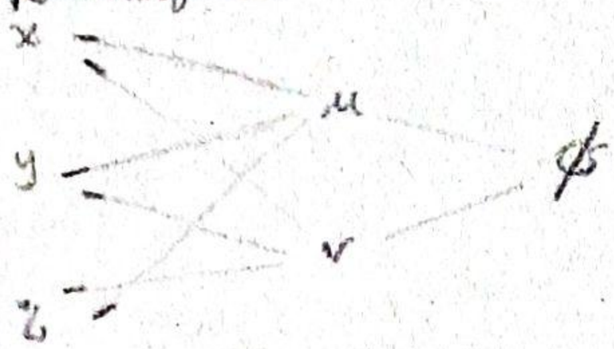
$w = (x+y+z)\cdot\phi\left(\frac{2x-y}{z}, \frac{x+2y}{z}\right)$

Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$

Sol 2:

Sea $u = \frac{2x-y}{z}$, $v = \frac{x+2y}{z}$ $\Big\}$ $w = (x+y+z)\cdot\phi(u,v)$

La Ramificación



• $\frac{\partial w}{\partial x}$ =

Indique $w = (x+y+z)\cdot\phi(u,v)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_{(u,v)}\cdot\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} + (x+y+z)\cdot\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_{(u,v)}\cdot[1+0+0] + (x+y+z)\cdot\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial x}$$

al trabajar y, z como constante

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \phi(u,v) + (x+y+z)\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial x}$$

$\phi_{u,v} = (u,v)$

$v = (x+2y/z)$

$\partial v = \frac{1}{z}(1) + 0)\partial x$

$$\frac{\partial\phi_{u,v}}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{z}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}$$

$\downarrow u = \frac{2x-y}{z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(2x-y/z)}{\partial x}$$

constante; procedemos como constante

$$= \partial\left(\frac{2}{z}\cdot x\right) - \partial\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$= \frac{2}{z}(1) - 0$$

• Ejercicio de examen tomado:

1) Si $w = H\left(\frac{x-y}{z}, \frac{2x+3y}{z}\right)\cdot G\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$

Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \phi(u,v) + (x+y+z)\cdot\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \phi(u,v) + (x+y+z)\cdot\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial z}$$

2) Si $w = x^2\cdot f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$; hallar $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$

1) Derivada parcial de Orden Superior

$f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

f ES una función definida en un intervalo abierto D, la derivada parcial respecto al i-ésimo componente es:

$$D_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_i}$$

Siendo $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i+h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

Si ∃ → A este resultado volvemos a derivar respecto del j-ésimo componente es:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j\,\partial x_i} = D_{ji} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

↳ llamada derivada parcial de 2° orden

1) Derivando nuevamente $\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j\,\partial x_i}$ respecto al k-ésimo componente

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left[\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j\,\partial x_i}\right] = \frac{\partial^3 f(\bar{x})}{\partial x_k\,\partial x_j\,x_i}$$

↳ llamada derivada parcial de 3° orden

Así sucesivamente hasta el n-ésimo componente.

OBS

1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \to f(x,y) = z$ ↳ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ "derivadas mixtas" son iguales y continuas

Las derivadas son continuas e iguales cruzadas

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \to f(x,y,z) = w$ ↳ $\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial x\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial z}$

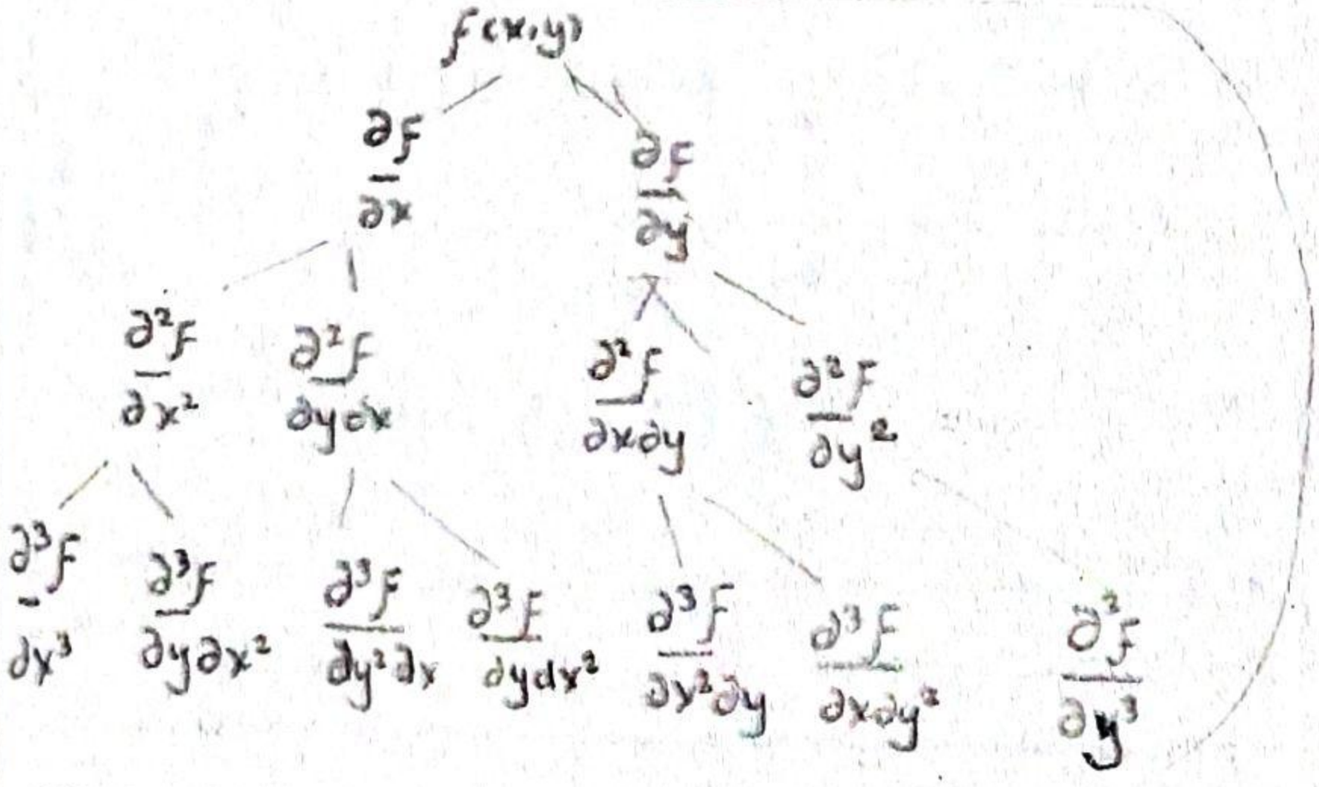
$\underbrace{Df(\bar{x})}_{321} = \underbrace{Df(\bar{x})}_{312} = \underbrace{Df(\bar{x})}_{123}$

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x}{y}$$

Hallar la derivada de 2° y 3° orden

lo más conveniente es hallar usando ramas:



$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(1) - 0$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$

$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 + \frac{1}{y^2}$

2x es como cualquier

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$

derivada cruzada es lo mismo

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -\frac{2}{y^3}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{x}{y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 + \frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{-1}{y^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{2x}{y^3}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -\frac{2}{y^3}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = +\frac{6x}{y^4}$.

Ejercicio 1

Sea $w = x^2 \cdot f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$

Hallar la segunda derivada parcial con respecto a x

sol:

Haciendo $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$ } $w = x^2 \cdot f(u,v)$; $x \leftarrow u$, $y \leftarrow v$ } w

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \cdot f(u,v) + x^2 \cdot \frac{\partial (f(u,v))}{\partial x}$$

$$= 2x \cdot f(u,v) + x^2 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$= 2x \cdot f(u,v) + x^2 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \left(-\frac{2y}{x^2}\right) \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x \cdot f(u,v) + \frac{x^2}{y} \cdot \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} - 2y \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = x f(u,v) + 2x \frac{\partial f(u,v)}{\partial x} \; _| \; - -$$

07 de Mayo Viernes

Definición

$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f una función definida en un intervalo A

a) Decimos que f presenta un máximo absoluto en el punto $P_0 \in A$:

Si $f(P) \leq f(A_0) \ \forall P \in A$

b) Decimos que f presenta un mínimo en el punt $Q_0 \in B$

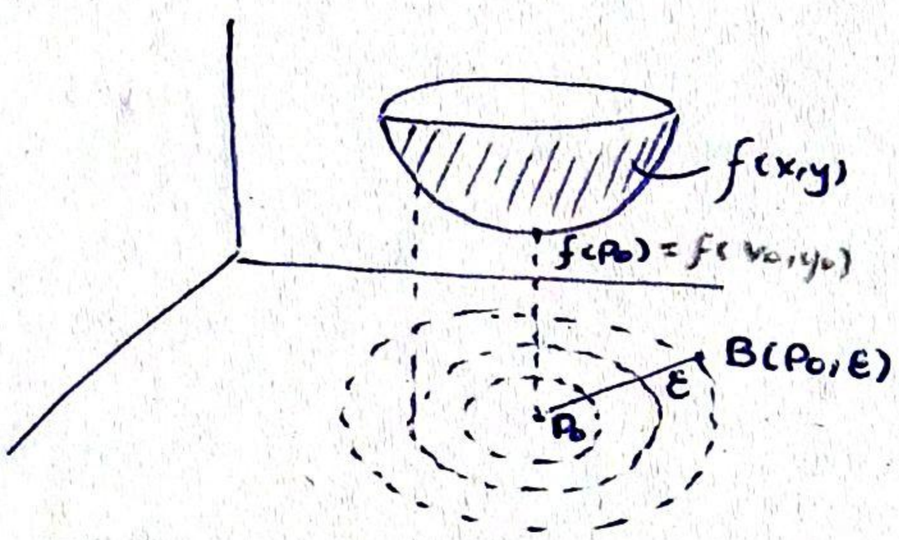
Si $f(Q_0) \leq f(Q) \ \forall Q \in B$

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

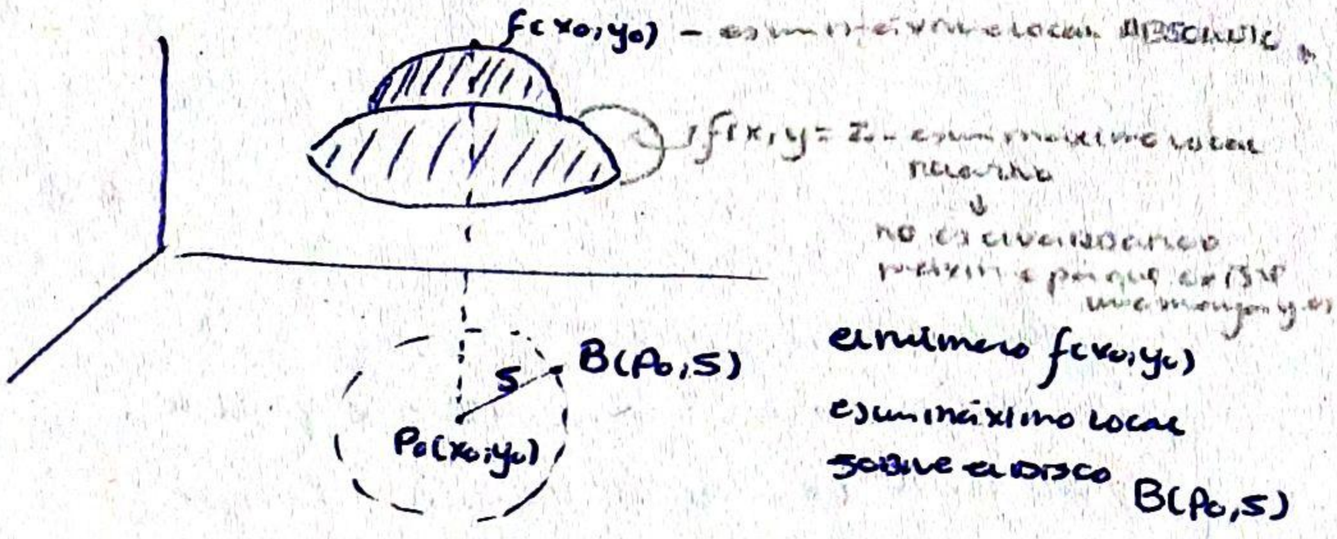
$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = z$

$Graf = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D$ es una superficie en $\mathbb{R}^3 \}$

la una superficie en $\mathbb{R}^3$ Tiene máximo y mínimo ó un punto de silla, como por ejemplo:



el número $f(x_0,y_0)$ es un mínimo local sobre $B(P_0,\varepsilon)$



el número $f(x_0,y_0)$ es un máximo local sobre el disco $B(P_0,\delta)$

Definición

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función en un intervalo abierto D

$(x_1,x_2,\dots x_n) \rightarrow f(x_1,x_1,\dots x_n)$

i) Decimos que la función f presenta un máximo relativo o local en $P_0 \in D$, si $\exists$ $B(A_0,\delta)$ talque: $f(P) \leq f(P_0) \ \forall P \in B(P_0,\delta)$

Luego $f(P_0)$ es llamado máximo relativo

ii) Decimos que la función f presenta un mínimo relativo o local talque $f(P_0) \leq f(P)$, $\forall P \in B(P_0,\varepsilon)$

- TEOREMA: (Criterio de la primera derivada en Cal II)

$f: D \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, una función definida en un abierto D

posee extremo relativo en $P_0 \in D$ y:

$\frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \quad \exists \ i = 1,2,3,\dots,n$

$\rightarrow \frac{\partial P(Q_0)}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1,2,\dots,n$

- función cuadrática

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuadrática cuyo valor $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ está dado por:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_i x_j$$

donde $H = [h_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz simétrica $H = H^T$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

matricialmente se tiene:

$$F(\bar{x}) = \bar{X} H X^T$$

$$F(\bar{x}) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} h_{11} \dots h_{1n} \\ h_{21} \dots h_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \\ h_{n1} h_{n2} \dots h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

la Transpuesta

Para ejemplo bajamos el $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^2$ y vemos:

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1,x_2) \rightarrow F(x_1,x_2)$, talque $\bar{x} = (x_1, x_2)$

$$\rightarrow F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_{ji} x_i x_j$$

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (h_{i1} x_i x_1 + h_{i2} x_i x_2)$$

$$= h_{11} x_1 x_1 + h_{12} x_1 x_2 + h_{21} x_2 x_1 + h_{22} x_2 x_2$$

$$= h_{11} (x_1)^2 + h_{12} x_1 x_2 + h_{21} x_2 x_1 + h_{22} (x_2)^2$$

$$\therefore F(\bar{x}) = [x_1 x_2]_{1\times 2} \begin{bmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

donde $\begin{bmatrix} h_{11} h_{12} \\ h_{21} h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} h_{21} \\ h_{12} h_{22} \end{bmatrix}$ donde $h_{21} = h_{12}$

ej 1: $F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3$ ejemplo 3: $2x^2 + xy - xz + yz + y^2 - z^2$

↓

hallemos la matriz de orden 3:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \rightsquigarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

esto es la matriz Hessiana

ej 2: $\frac{1}{2}(x_1)^2 - x_1x_4 + 8x_1x_3 - 5x_2x_4 + (x_2)^2$

$+(x_3)^2 - 3(x_4)^2$

hallemos la matriz de cuarto orden

(la diagonal porque aparece el mismo x_i)

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

a b c

- los unos a, b, c: sus valores que se pueden sacar dividiendo a mitad el orden uno (son los transpuesta
- (): como no hay valor se pone Cero = 0

$h_{11} \approx$ se relaciona con $x_1 x_1 = (x_1)^2$

$$\rightarrow H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 4 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -5/2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -5/2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y - z$ → $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$ ($D_{11}f$); $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ ($D_{21}f$); $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -1$ ($D_{31}f$)
- $\frac{\partial f}{\partial y} = x + z + 2y$ → $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ ($D_{22}f$); $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ ($D_{12}f$); $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 1$ ($D_{32}f$)
- $\frac{\partial f}{\partial z} = -x + y - 1$ → $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ ($D_{33}f$); $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -1$ ($D_{13}f$); $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 1$ ($D_{23}f$)

lo resaltado en la pizarra (11, 22, ...) son los órdenes de la matriz que se pide, y como se ha venido haciendo: salgue:

luego:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Practica
Hessiana

Definición:

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto, tal que existe:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j x_i}, \quad \forall \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

La función Hessiana de f en $\bar{x}$ está dado por:

$$\partial^2 f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} (\partial x_i)(\partial j)$$

dada la matriz Hessiana es:

$$H_{f(\bar{x})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Siguiente clase

- Siguiente clase #12
  - Conjunto Maximum / Minimum (optimización)
    - Extremo condicionado
      - Multiplicadores de Lagrange
        - Max / Min mediante Lagrange
        - Función Hessiana
    - Conjunto abierto
    - Criterio de la primera derivada
    - Punto de silla
    - max max y min relativo

1. Longitud Máxima y Mínima

Teorema:

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función derivable en el abierto D

talque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sean continuas $\forall \bar{x} \in D$.

Si $P_0 \in D$ un punto de paso parcial cual $\frac{\partial f(P)}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1,2,\dots,n$

entonces

i: P_0 corresponde a un mínimo relativo o local

si $\Delta_{ii} > 0$, $\forall i = 1,2,\dots,n$

ii: le corresponde un máximo relativo o local

si $(-1)\Delta_{ii} < 0$, $\forall i = 1,2,\dots,n$

→ Donde Δ_{ii} son determinantes de la matriz Hessiana

$H(f(P_0))$

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\Delta_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{nn} = [H]$$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

COROLARIO

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

una función definida en un abierto D, talque f tiene derivadas parciales continuas hasta el orden n-ésimo. Sea $P_0 \in D$ un PUNTO CRÍTICO, entonces:

ⓐ $P_0 = (x_0, y_0)$ corresponde un mínimo relativo o local

si

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

$$\Delta_{22} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) > 0$$

ⓑ $P_0 = (x_0, y_0)$ corresponde un máximo relativo o local

si

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$$

$$\Delta_{22} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) > 0$$

ⓒ si $\Delta_{22} < 0$ → corresponde a punto de silla

ⓓ si $\Delta_{22} = 0$ → no se puede decir nada

Nota:

Para optimizar una función f:

1) Hallar los puntos críticos $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\right)$

2) Hallar la matriz Hessiana $\left(H(F(P_0))\right)$

3) Analiza en cada punto crítico en la matriz Hessiana

Ejm1: $5x^3+5y^3+45x^2-15y^2+75x-45y$

Sol1

1. Hallando puntos críticos

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 15x^2+90x+75=0 \Rightarrow x^2+6x+5=0$
  $(x+1)(x+5)=0 \begin{cases} x=-5 \\ x=-1 \end{cases}$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 15y^2-30y-45=0 \Rightarrow y^2-2y-3=0$
  $(y-3)(y+1)=0 \begin{cases} y=3 \\ y=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Los puntos críticos son:

$P_1=(-5,-1)$, $P_2=(-1,3)$

$P_3=(-5,3)$, $P_4(-1,-1)$

2. Hallando matriz Hessiana $H(f(P_0))$

$$H(f(P_0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{matrix}$$

entonces:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x+90$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 30y-30$

$\rightarrow H(f(P_0)) = \begin{bmatrix} (30x+90) & 0 \\ 0 & (30y-30) \end{bmatrix}$

3. Analizando cada punto crítico

Para $P_1(-5,-1)$

$$H(f(-5,-1)) = \begin{bmatrix} (-150+90) & 0 \\ 0 & (-30-30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & 0 \\ 0 & -60 \end{bmatrix}$$

de donde:

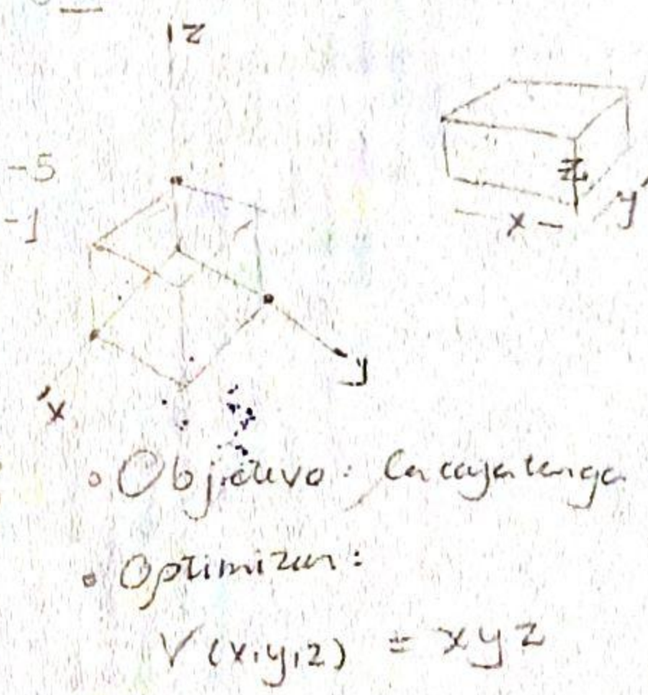
$\Delta_{11}: -60<0$, $\Delta_{22}(-60)(-60)-(0)(0)>0$

$\therefore$ el punto $P_1(-5,-1)$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor de retorno es $f(-5,-1) =$

Falta analizar en el punto P_2, P_3, P_4

Ejm2: Halla las dimensiones de una caja rectangular cerrada de máximo volumen cuya superficie es $30m^2$.

Sol2.



Sea:
- x ancho
- y largo
- z altura
- V : volumen
- A : área total $= 30m^2$

- Objetivo: Caja que tenga máx. volumen
- Optimizar:

$V(x,y,z) = xyz$

$GA = 2xy+2yz+2xz = 30$

$A = xy+yz+xz=15$

$A = xy+z(x+y)=15$

$A = z = \frac{15-xy}{x+y}$

$\Rightarrow V(x,y,z) = xy\left(\frac{15-xy}{x+y}\right)$; $x>0, y>0$, $x=y\neq 0$

1) Hallamos los puntos críticos:

$\frac{\partial V}{\partial x}=0$, $\frac{\partial V}{\partial y}=0$

- hallar puntos críticos
- hallar matriz Hessiana
- analizar

2. Extremos condicionados

Definimos $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Una función definida en un abierto D y sea $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Decimos que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfacen "condiciones de enlace"

Si $\exists$ funciones:

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

, la matriz Hessiana $H = [h_{ij}]_{(n-m)\times n}$

OBS: $\varphi(P) \leq F(P_0)$, $P_0 \in D$ corresponde a un máximo o mínimo condicionado
$\varphi(P_0) \leq f(P)$

Para hallar máximo y mínimo condicionado se usa el método de Multiplicador de Lagrange

$f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un abierto D talque, existe la derivada parcial hasta el orden 3:

Para obtener el máximo o mínimo en $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeto a las condiciones de enlace

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad m < n \end{cases}$$

Se puede de la siguiente manera:

1° Construir la función Lagrangiana

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \lambda_2 \varphi_2(\bar{x}) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son multiplicadores de Lagrange

2° Hallar los EXTREMOS CONDICIONADOS (puntos críticos)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

3° Forma Hessiana

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\partial x_i) \cdot \partial (x_j)$$

y con la ayuda de la diferencial de "x" de CONDICIONES DE ENLACE:

$$\partial \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\partial \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\partial \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Se tiene la siguiente forma cuadrática.

- Forma Hessiana de n-m términos:

$$\sum_{i=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} b_k \varphi (\partial x_k)(\partial x_i)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial z}$

Para hallar máximo y mínimo condicionado se usa el método de Multiplicadores de Lagrange

$f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un abierto D donde existe las derivadas parciales hasta el orden 3:

Para obtener el máximo o mínimo en $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeto a las condiciones de enlace

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad , m < n \end{cases}$$

Se procede de la siguiente manera:

1° Construir la función Lagrangeana.

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) + \lambda_2 \varphi_2(\bar{x}) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(\bar{x})$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son multiplicadores de Lagrange

2° Hallar los EXTREMOS CONDICIONADOS (puntos críticos)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

3° Forma Hessiana

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\partial x_i) \cdot \partial(x_j)$$

y con la ayuda de la diferencial de "x" de CONDICIONES DE ENLACE:

$$\partial\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\partial\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$\partial\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Se tiene la siguiente forma cuadrática

• Forma Hessiana de n-m términos:

$$\sum_{i=1}^{n-m} \sum_{k=1}^{n-m} b_k \varphi(\partial x_k)(\partial x_i)$$

4° Se obtiene la matriz Asociada a esta forma Hessiana de orden $(n-m)$ adecuada $(n-m) \times (n-m)$

5° Evaluar para un punto crítico en la matriz Hessiana de orden $(n-m)$

Ejm:

Hallar los extremos condicionados $f(x,y,z) = xyz$, sujeto a las condiciones

$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = x + y - z - 5 = 0$

$\varphi_2(x_2, y_2, z_2) = x - y - z - 10 = 0$

Sol.

① la forma Lagrange

$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1(x+y-z-5) + \lambda_2(x-y-z-10)$

② Hallar puntos críticos

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad -①$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad -②$

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad -③$

$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = x + y - z - 5 = 0 \quad -④$

$\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = x - y - z - 10 = 0 \quad -⑤$

De ① y ③ : $xy + yz = 0$

$y(x+z) = 0$

$y = 0$ (No) $\vee$ $x + z = 0$, $z = -x$

Por: $x = -z$, ④ y ⑤

$$\begin{cases} -z + y - z - 5 = 0 \\ -z - y - z - 10 = 0 \end{cases}$$

i) $\boxed{z = -15/4}$, $\boxed{x = 15/4}$

de ④ como sabemos:

$y = 5 + 2z \rightarrow y = 5 + 2(-\frac{15}{4})$

$\boxed{y = -\frac{5}{2}}$

Punto crítico $\left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

③ Forma Hessiana

$x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$

$d^2 f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\partial x_i)(\partial x_j)$

$= \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} (\partial x_i \partial x_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} (\partial x_i \partial x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3} (\partial x_i \partial x_3) \right]$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\partial x_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \partial x_1 \partial x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \partial x_1 \partial x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \partial x_2 \partial x_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\partial x_2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\partial x_2 \partial x_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(\partial x_3 \partial x_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\partial x_3)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \partial x_3 \partial x_2$

④ Diferenciando la condición de enlace

$\partial\varphi_1 = \partial x + \partial y - \partial z = 0$

$\partial\varphi_2 = \partial x - \partial y - \partial z = 0$

$2\partial x - 2\partial z = 0$

$\partial x = \partial z$

$\partial y = \partial x_2 = 0$

$\partial x_1 = \partial x_3$

$\Rightarrow d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\partial x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\partial x)^2$

$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \partial x^2$

$H = [2y]$ la matriz Hessiana

$= (y+y)\partial x^2 = 2y\,\partial x^2$

Evaluando en el punto crítico:

$\left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

$\rightarrow H\left(f\left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right)\right) = [2(-\frac{5}{2})] = [-5] < 0$

de donde $\Delta_{11} = -5 < 0$

$\hookrightarrow \left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

Corresp. a un max condic

Jueves 20 Junio 2019

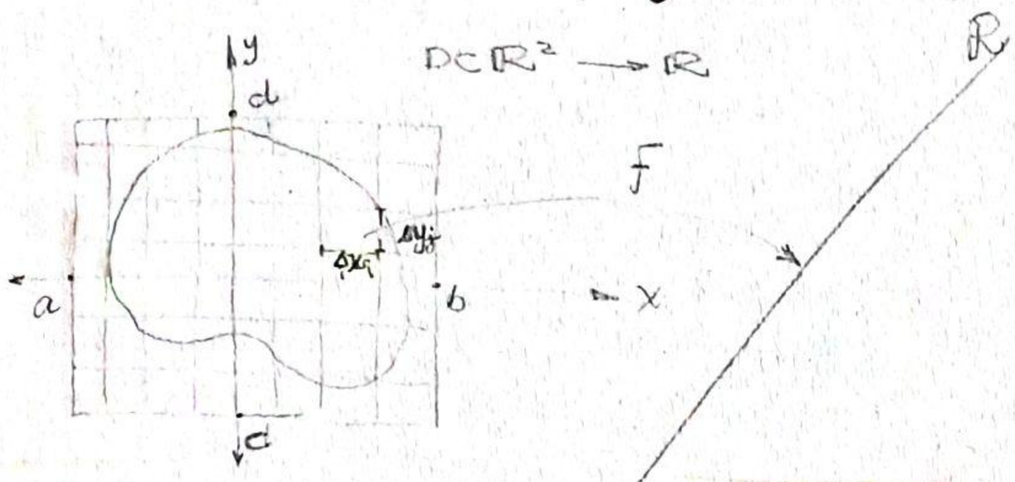
Tema: Integral Doble

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un conjunto de 2 variables.

Definición:

a) Diremos que el conjunto de $\mathbb{R}^2$ es acotado si existe un rectángulo $/ D \subset \mathbb{R}^2$, $D = [a,b] \times [c,d]$ además

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq a\}$ ∞ (D podría llamarse Región)



Para llegar a la definición de la integral doble se tiene:

b) Una partición de D, es un conjunto de subrectángulos

$P = P_1 \times P_2 = \{ [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ donde $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, n \}$

donde $P_1 = [a,b]$ partición sobre eje X

$\to P_1 = \{ x_0, \dots x_{i0}, \dots, x_n \}$

$P_2 = [c,d]$ partición sobre el eje Y

$\to P_2 = \{ y_0, y_1, \dots, y_n \}$

Nota:

1) Rectángulo D se divide en sub-rectángulos

2) $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = \frac{d-c}{n}$

3) El ÁREA de un subrectángulo $\Delta_{ij} A = (\Delta_i x)(\Delta_j y)$

4) A la mayor diagonal de un subrectángulo se llama NORMA de la partición P, se denota $\|P\|$

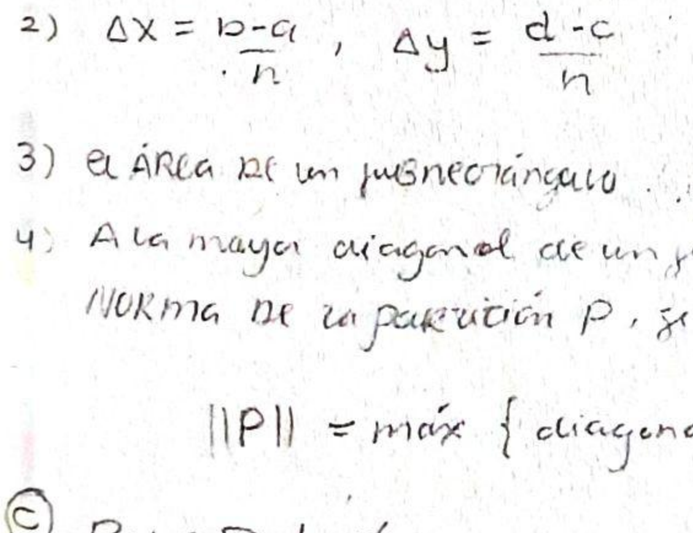
$$\|P\| = \text{máx} \{ \text{diagonal } P_{ij} \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=2,\dots,n}}$$

c) $R_{ij} \cap D \neq \emptyset$

d) $f: D \cap \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es acotado

$\Rightarrow \exists$ reales K_1, K_2 tales que

$K_1 \leq f(x,y) \leq K_2$, $\forall (x,y) \in D$



$\Delta_{ij} A = (\Delta_i x)(\Delta_j y)$

$f(x_i, y_j)\, \Delta_{ij} A = f(x_i, y_j)(\Delta_i x)(\Delta_j y)$

$$\sum_{i,j}^{n} f(x_i, x_j)\, \Delta_{ij} A = \sum_{\lambda, j}^{n} f(x_i, y_j)(\Delta_i x)(\Delta_j y)$$

Notar que $\Delta_{ij} A = (\Delta_i x)(\Delta_j y) = dx\,dy = dA$ o $dy\,dx = dA$ es el diferencial del área A

Seguimos:

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{ij}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta_{ij} A$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{ij}^{n} \underbrace{f(x_i, y_j)}_{\text{ALTURA de la función en sí}} \underbrace{(\Delta_i x)(\Delta_j y)}_{\text{base celdita}} = L$$

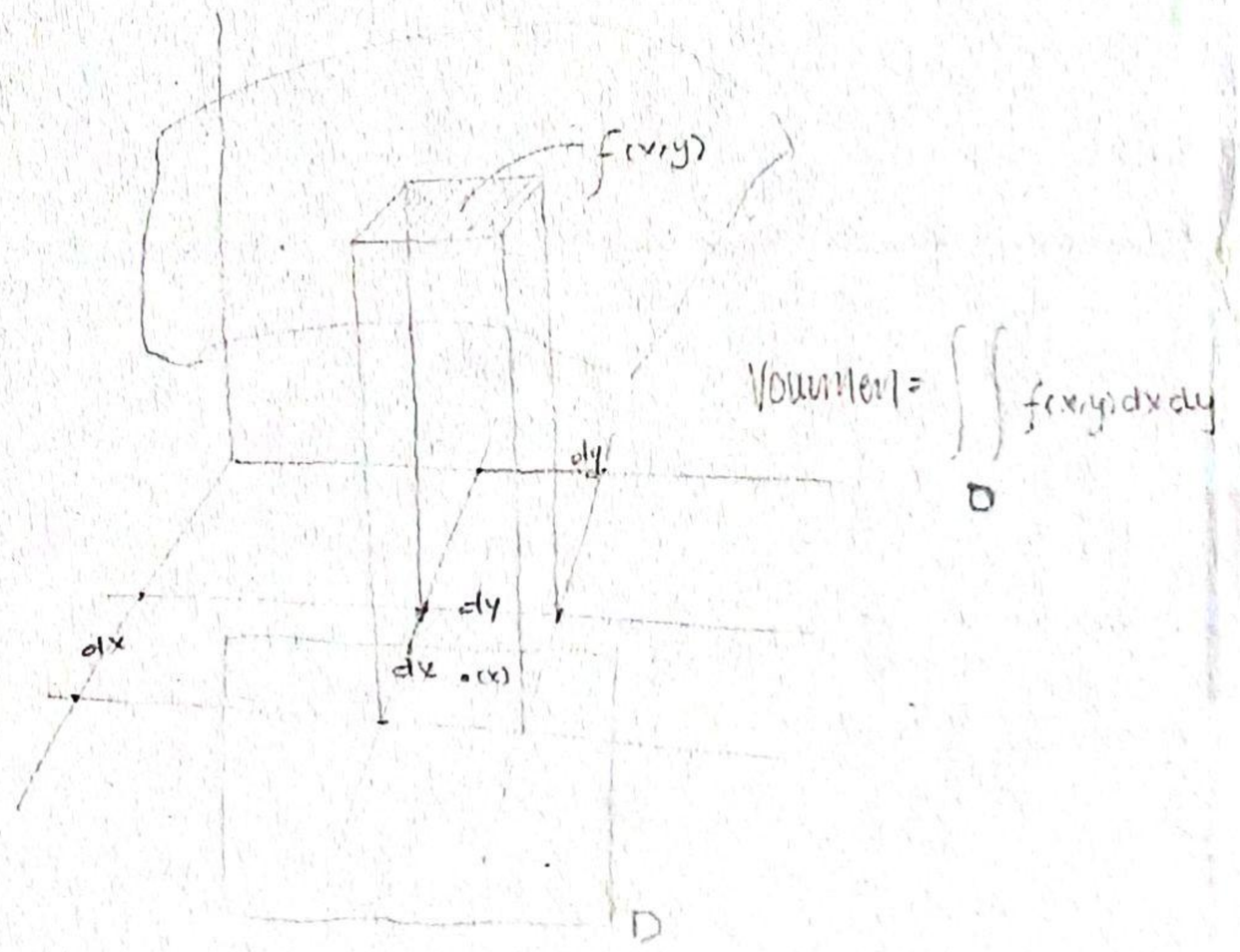
∞ Si $\exists L$, a esta se llama Integral Doble y se denota $\iint_D$ y está dado por:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

Regresa un número

↳ f es integrable en la región D

Interpretación volumen geométricamente



Propiedad:

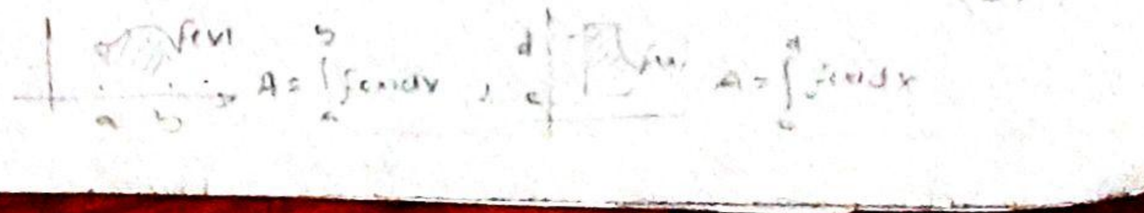
1) $\iint_D k f(x,y)\, dx\,dy = k \iint_D f(x,y)\, dx\,dy$

2) $\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y)) = \iint_D f(x,y) \pm \int_D g(x,y)$

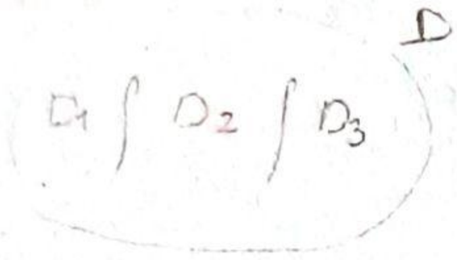
3) Si D es simétrico del eje y y si $f(-x,y) = -f(x,y)$, f es impar en x

$$\iint_{D(\bar{x})} f(x,y)\, dA = \iint_{D(x^+)} f(x,y)\, dA \to \iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D(x^+)} f(x,y)\, dA + \iint_{(Dx^*)} f(x,y)\, dA$$

↳ Recordar:



Si D divide en D_1, D_2, D_3



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA + \iint_{D_3} f(x,y)\,dA$$

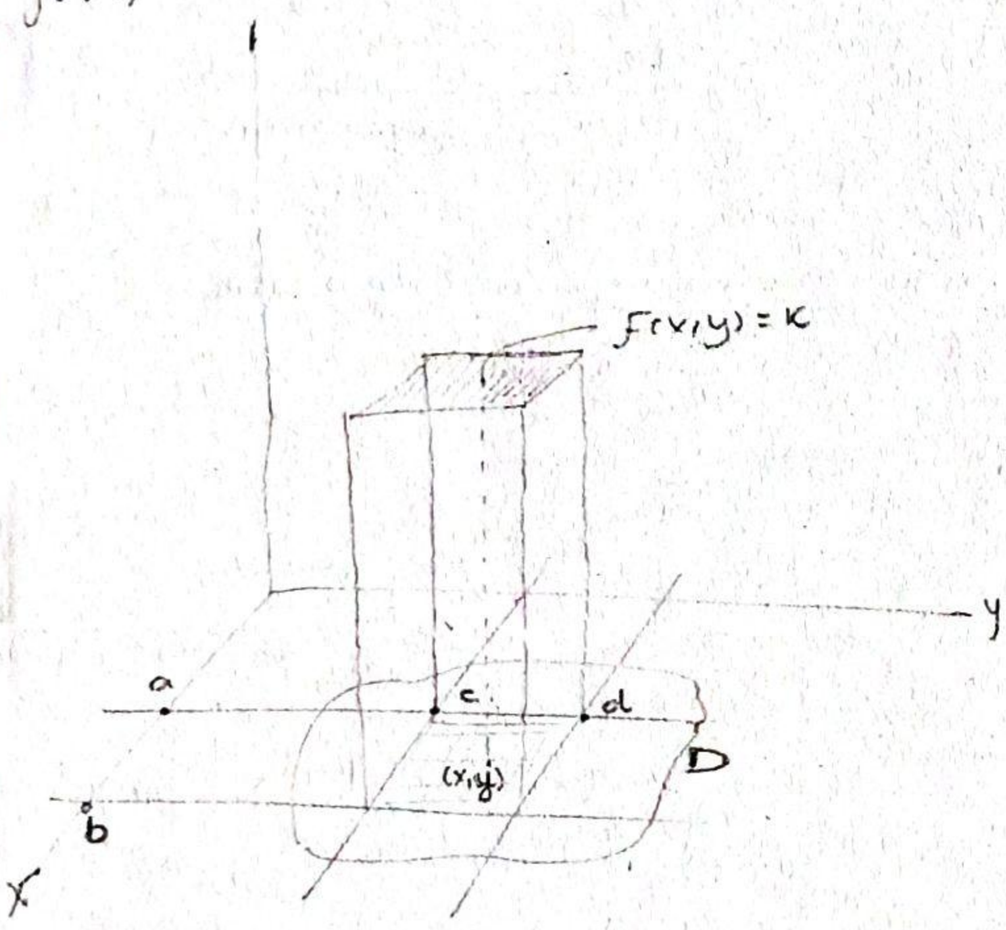
Ejemplo 1

Sea $f(x,y) = K$, K es una constante positiva,

$R = [a,b] \times [c,d]$ determinar el volumen del sólido debajo de $f(x,y)$, encima $z=0$, $x=a$, $x=b$

$y=c$, $y=d$.

$\int_a^b (1)$



$$V = \iint_D f(x,y)\,dA$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d K\,dy\right] dx$$

$$= \int_a^b \left(K \int_c^d dy\right) dx = \int_a^b [Ky]_c^d = K \int_a^b (d-c)\,dx$$

$$= K(d-c) \int_a^b dx = K(d-c)(b-a)$$

Ejemplo 2: $x^4y + y^2$, $R = [-1,1] \times [0,1]$

Calcular $\iint_D f(x,y)\,dA$

Sea $f : (x,y) \longrightarrow f(x,y)$

$x^4y + y^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

dominio $R = [-1,1] \times [0,1] = [a,b] \times [c,d]$

el volumen $= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dA$ ... en general primero $\int_a^b \left(\int_c^d dy\right) dx$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\int_0^1 (x^4y + y^2)\,dy\right] dx$$ luego

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3} - 0\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}\right] dx = \left[\frac{x^5}{10} + \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = 13/15$$

La dificultad es integrar la función puede ser $\int \int$, $\int$ $\int$, algo, con nuestras cuatro del Dominio

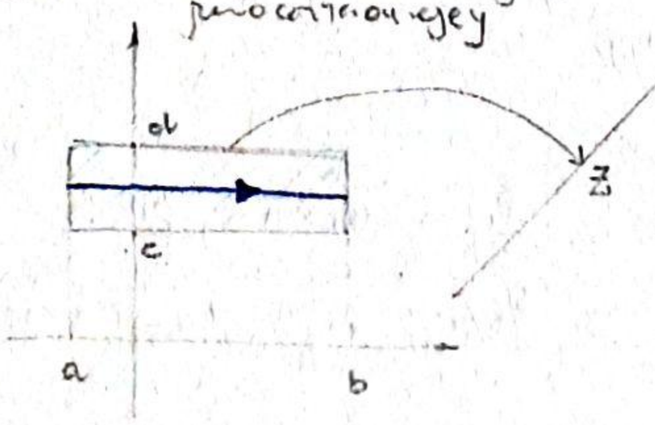
• Cálculo de Integrales Dobles sobre regiones generales (NO necesariamente rectángulos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Se presentan los siguientes casos

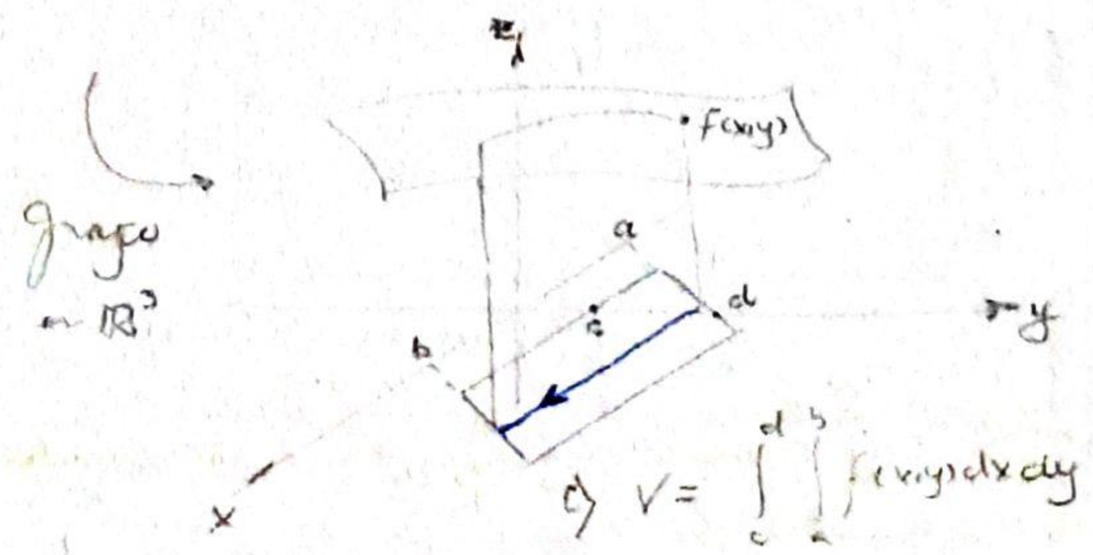
CASO I: Dominio $= D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{matrix} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{matrix}\}$ = Rectángulo

→ la primera diferencial del volumen sea dy

i) FLECHA paralelo al eje x pero cortando eje y



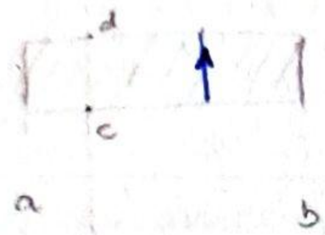
Como gráficos estamos función de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ su grafo es en $\mathbb{R}^3$

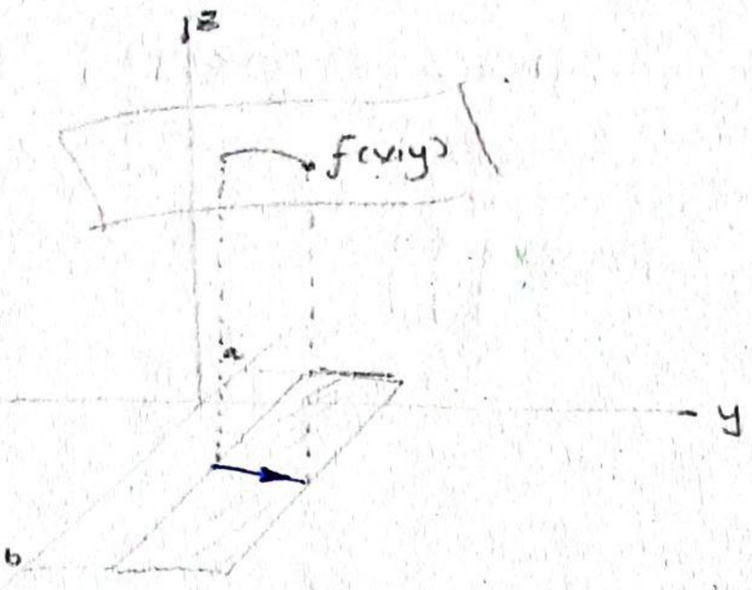


$$\Rightarrow V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

ii) La flecha es paralela al eje y pero corta al eje x

→ en la ecuación del volumen aparece primero el dx





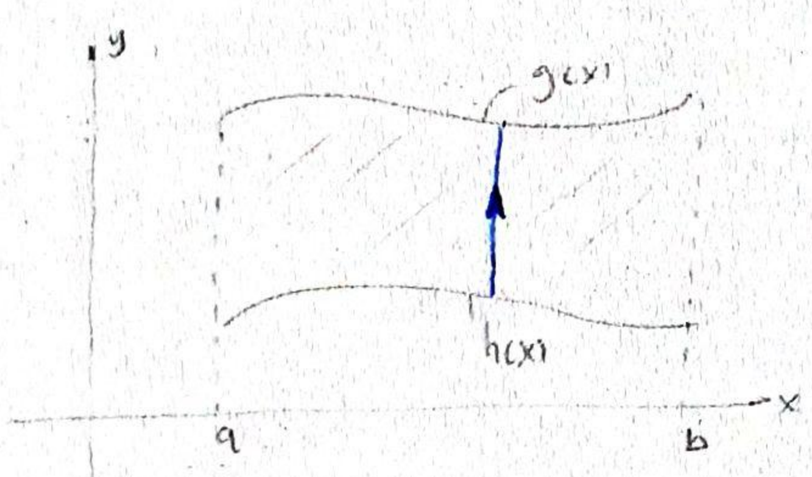
I) Para el caso ii

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Caso II:

Si Dominio $= D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b,\ h(x) \le y \le g(x)\}$

obs tal que para el caso I, la elección de la flecha es misma dirección y es igual que la misma flecha usada en la resolución de la integral

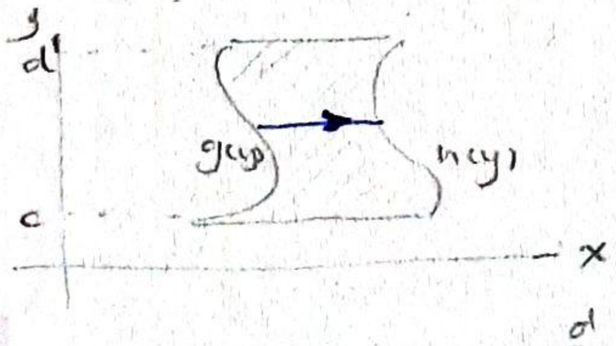


$$V = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

↓ flecha que corta al eje x parecido al primer caso de caso I

Caso III:

Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(y) \le x \le h(y),\ c \le y \le d\}$

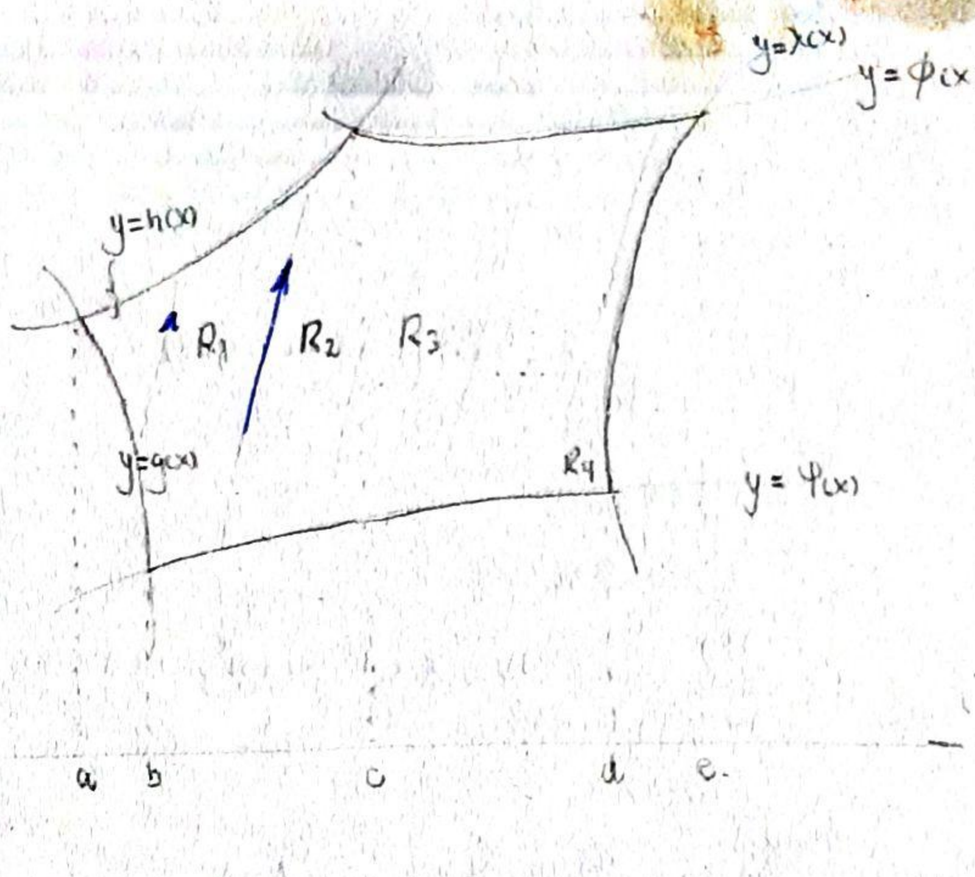


$$V = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

" ya que y es constante

→ la elección es netamente para poder integrar primero x y luego y

OBS:



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx + \iint f(x,y)\,dA + \iint f(x,y)\,dA + \iint f(x,y)$$

R_1 + R_2 + R_3 + R_4

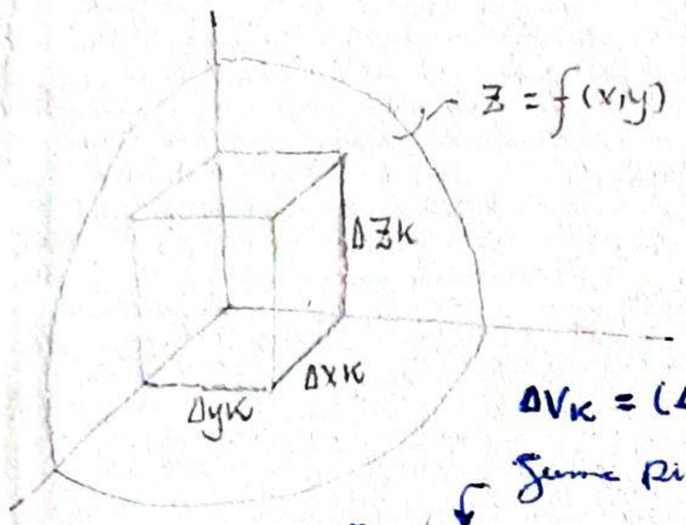
↓ de acuerdo al caso I

↳ en este caso hubiera tomado flechas que cortan al eje x

$$\int \left[\longrightarrow \right] dy$$

Viernes 21 de Mayo, 2019

Tema: Integral Triple



$\Delta V_k = (\Delta x_k)(\Delta y_k)(\Delta z_k)$

↳ Suma Riemann

$$S_n = \sum_{0}^{n}\sum_{0}^{n}\sum_{0}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta_k V$$

Teorema:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_S f(x,y,z)\,\partial V = \iiint_D f(x,y,z)\,\partial z\,\partial y\,\partial x$$

Teorema:

$$T_1: \iiint_S (a f(x,y,z) \pm b g(x,y,z)) = a\iiint_S f(x,y,z) \pm b\iiint_S g(x,y,z)$$

T_2:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,\partial v = \iiint_{S_1} f\,\partial v + \iiint_{S_2} f\,\partial v$$

T_3: Si $f \geq g$: $\iiint_S f\,\partial v \geq \iiint_S g\,\partial v$

T_4: Teorema de Fubbini para integral triple en $S = [a,b]\times[c,d]\times[m,n]$

↳ Si $w = f(x,y,z)$ es acotada y continua en el paralelepípedo S

↳ $$\iiint f\,\partial v = \iiint f(x,y,z)\,\partial v$$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)\,dv = \int_c^d \int_m^n \int_a^b f(x,y,z)\,dv$$

especificando

$$\int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)\,\partial z\,\partial y\,\partial x$$

T_5: Cuando el dominio es general

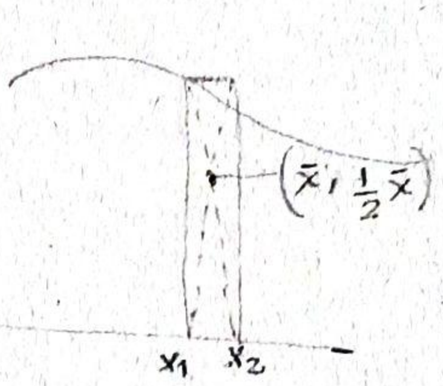
Si $w = f(x,y,z)$ es continua y acotada tal que:

$$\{a \leq x \leq b;\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x);\ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$$

↳

$$\iiint_S f(x,y,z)\,\partial V = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,\partial z\,\partial y\,\partial x$$

• Tener en cuenta la integral triple



El centro de gravedad de un rectángulo es la intersección de las diagonales

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \quad \text{(radio de giro / área)}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\text{volumen}}{\text{área}}$$

• Tener en cuenta Integral Doble

a) masas $m = \iint_R \rho(x,y)\,ds$ (letra ro)

b) centroide

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{my}{A} = \dfrac{\iint x\rho\,dA}{\iint dA} \quad \text{(no por diferencial del área)} \\ \bar{y} = \dfrac{mx}{A} = \dfrac{\iint y\rho\,dA}{\iint dA} \quad \text{(R: área de la región R)} \end{cases}$$

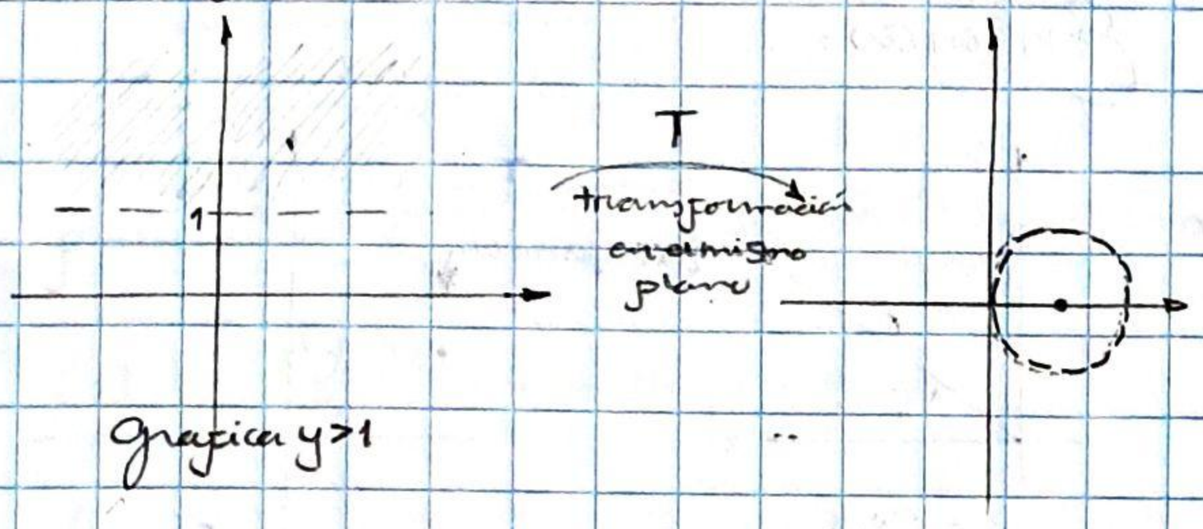
Transformaciones

Def: cambio de una función a otra

▷ Ejemplo 1 graficar $y > 1$, para $y = \frac{u}{u^2+v^2}$

Sol 1

Escribir $y = u/u^2+v^2$, $y = (u,v)$



Grafica $y>1$

Sea: $\frac{u}{u^2+v^2} > 1 \longrightarrow u > u^2+v^2$

$u - u^2 - v^2 > 0$

Tal que: $u - u^2 - v^2 = -(u^2+v^2-u)$

$\rightarrow -(u^2+v^2-u) > 0$

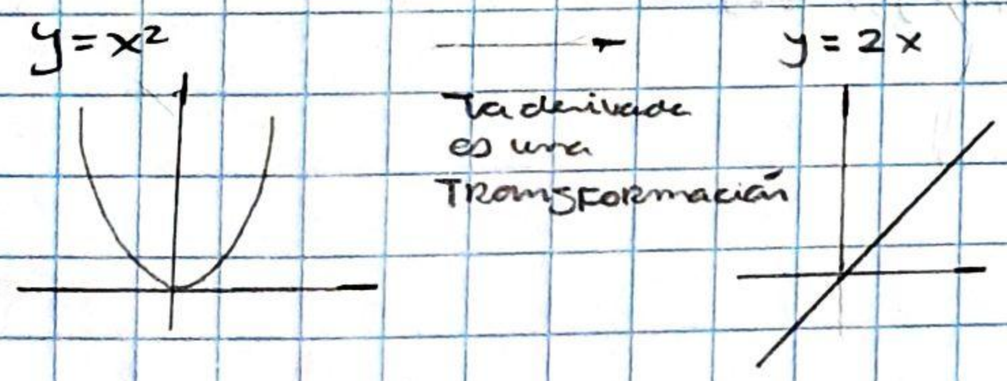
$u^2 - u + v^2 < 0$

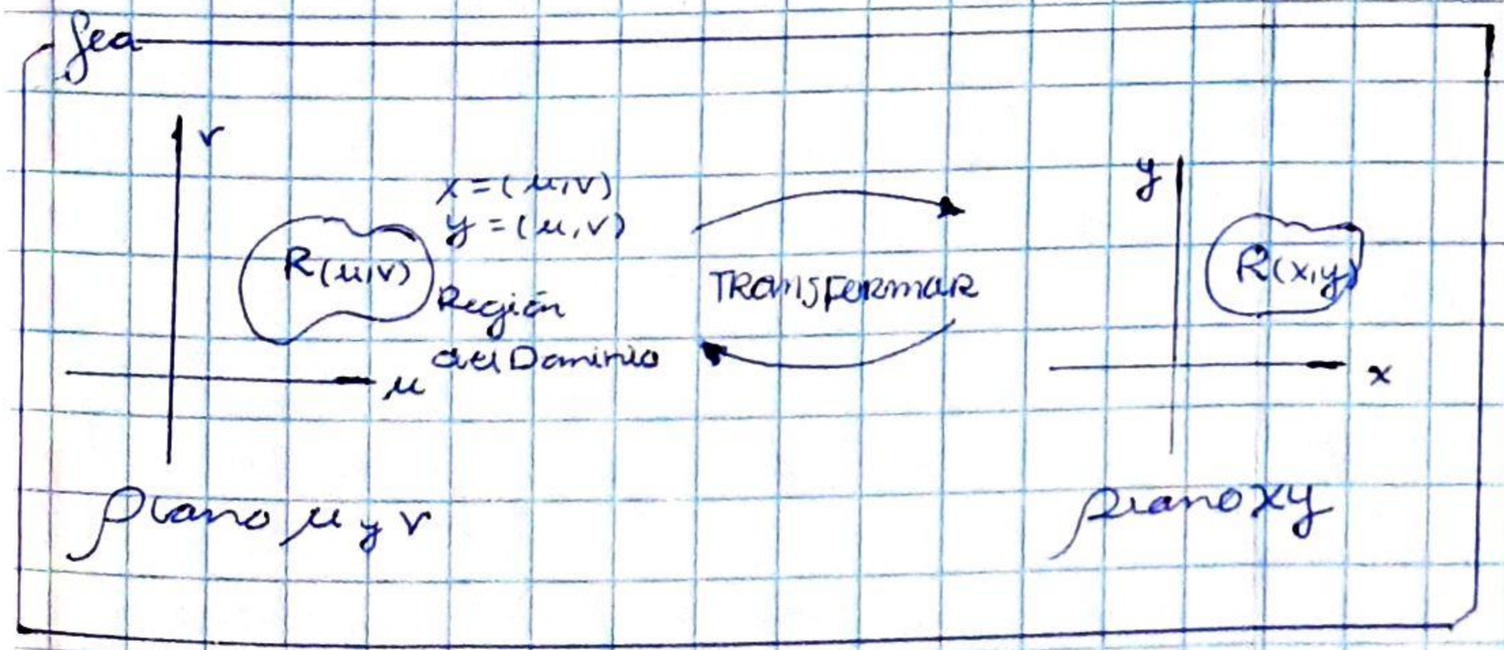
$\left(u^2 - u + \frac{1}{4}\right) + v^2 < \frac{1}{4}$

$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

($y>1$ sea transformado en una circunferencia de radio $1/2$ y centro $(\frac{1}{2}, 0)$

Nota:

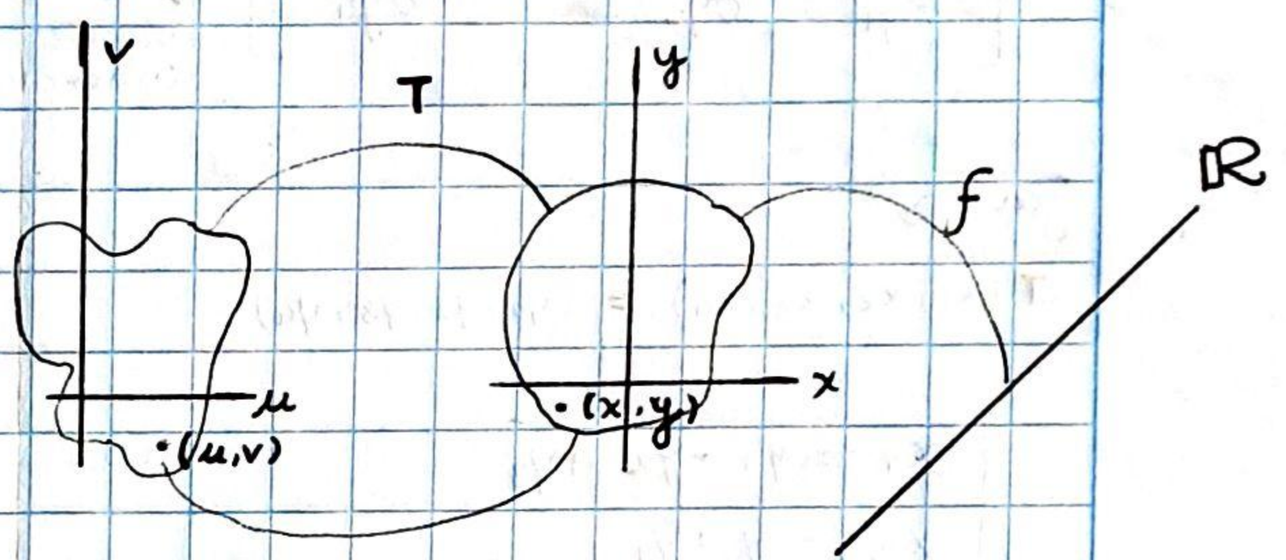




Integración por Cambio de Variable

Def:

Sea $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de transformación: continuamente diferenciable, definida por

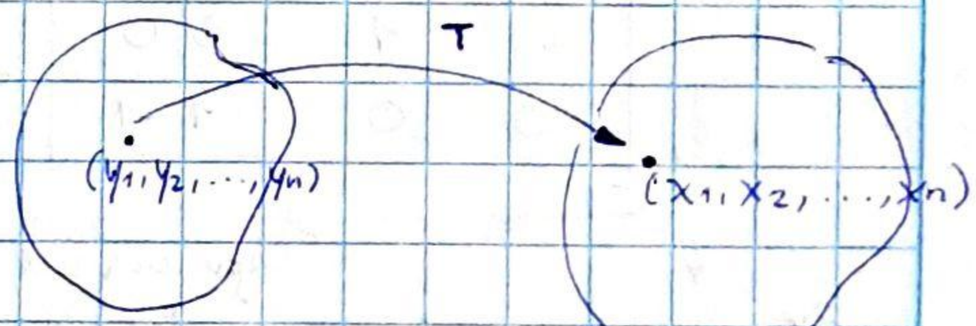


ES JACOBIANO - T dado por

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Generalizamos:

$T: D^* \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$



$$J_{(y_1,y_2,\dots,y_n)} = \frac{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

- si es una matriz cuadrática

Sea

$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (y_1,y_2,y_3,y_4)$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_3 + y_4 \\ x_3 = y_2 - y_1 \\ x_4 = y_3 - y_4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \partial(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial(y_1,y_2,y_3,y_4)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\frac{\partial x_1}{\partial y_4} = \partial(y_1 - y_2 + y_3) = 0$

$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \partial(y_1 - y_2 + y_3) = 1$

Definición del Jacobiano

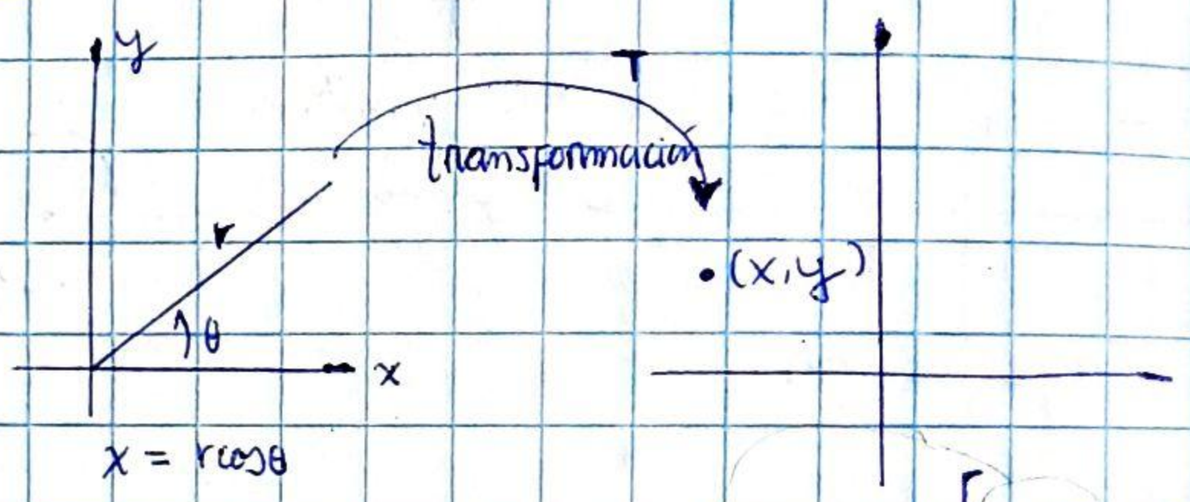
La transformación que va de D^* a D:

$$T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2$$

$$(r,\theta) \longrightarrow T(r,\theta) = (x,y)$$

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) \\ y = y(r,\theta) \end{cases} \rightsquigarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Entonces:



$x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$$J_{(r,\theta)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial x}{\partial r} = \partial(r\cos\theta)$ / ∂r

↳ el módulo de $\left\| \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \right\|$

$= \| (r\cos\theta^2) - (-r\operatorname{sen}^2\theta) \|$

$= r$

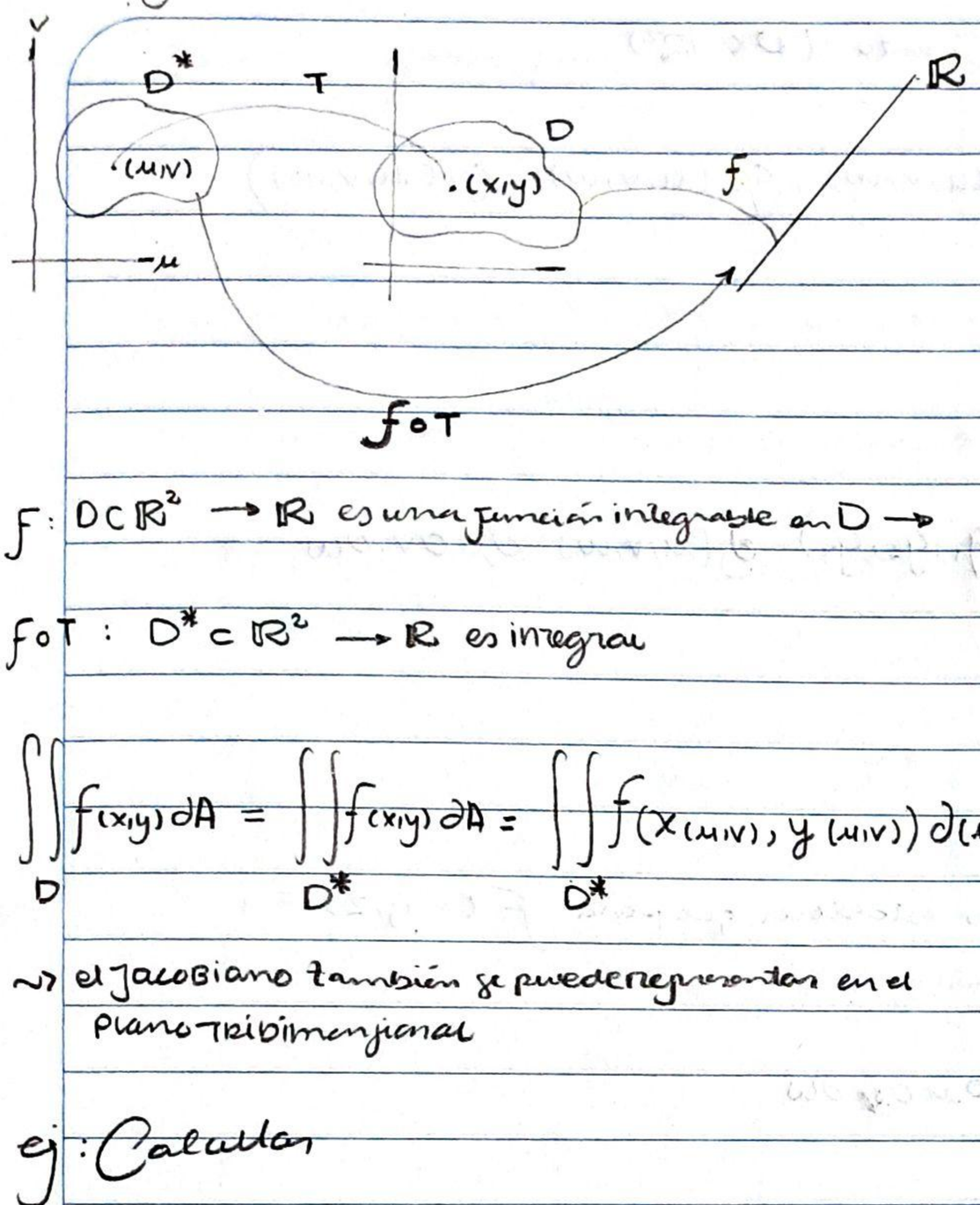
↳ el jacobiano

Sea

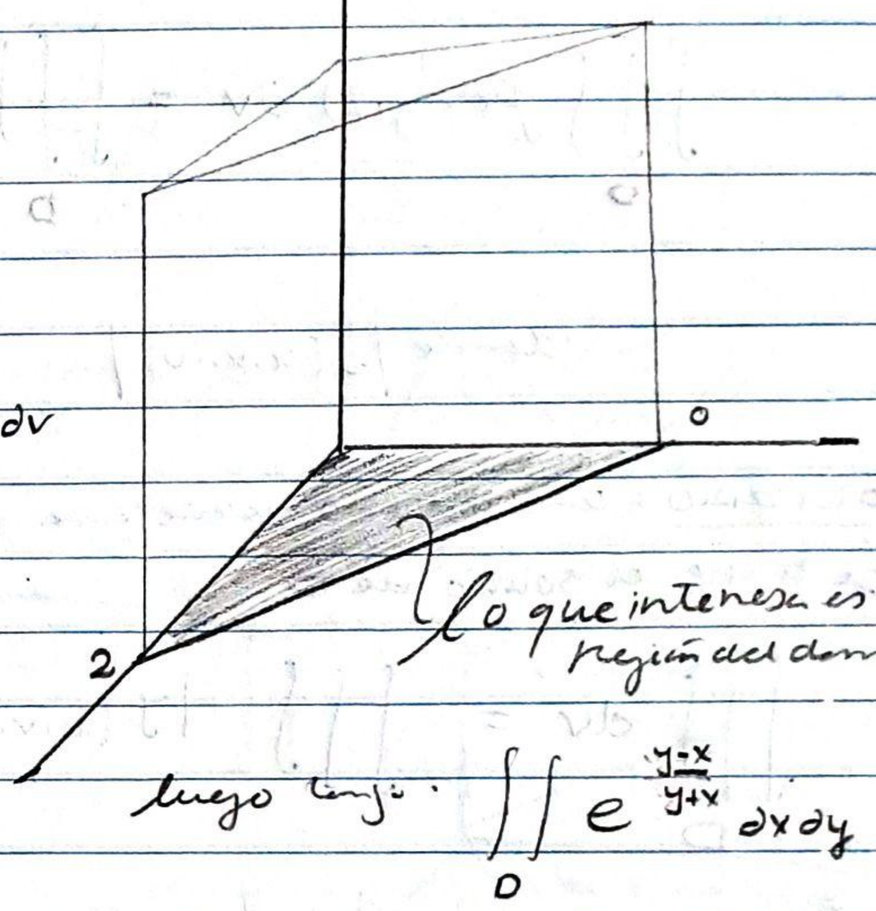
$$\partial(\mu,\nu) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \left|\frac{-1}{2}\right|$$

valor absoluto

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\partial \nu} = \frac{1}{2}$$



también:



$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $D \to$

$f \circ T : D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D^*} f(x,y)\,dA = \iint_{D^*} f(x(\mu,\nu), y(\mu,\nu))\,\partial(\mu,\nu)\,d\mu\,d\nu$$

↝ el jacobiano también se puede representar en el plano tridimensional

ej: Calcular

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$$, D triangulo limitado por $x+y=2$ y el eje coordenado

$$= \iint_{D^*} e^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot |-1/2|\,d\mu\,d\nu$$

↝ "Es muy complicado la integral, por eso se hace uso de artificios (de los 11 casos del cálculo II) y uso del jacobiano"

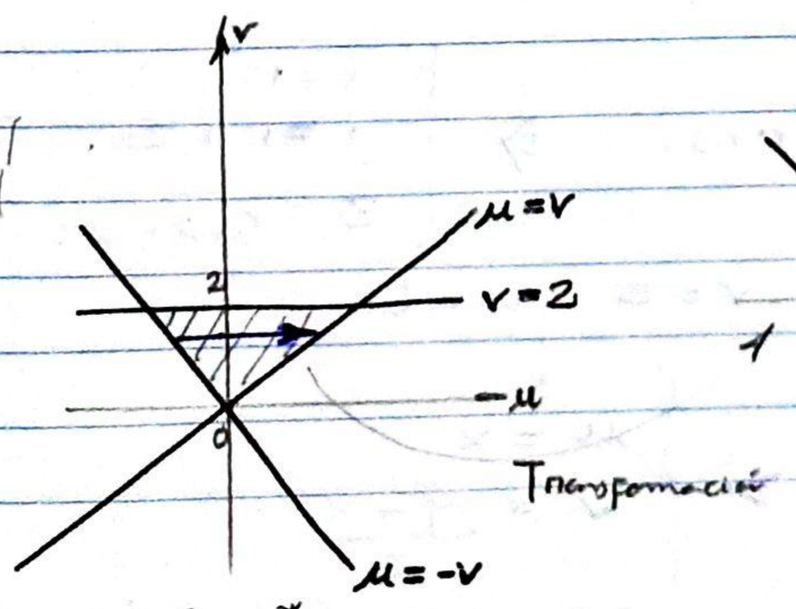
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{-\nu}^{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}}\,d\mu\,d\nu$$

Sol
→ se hace el cambio de variable:

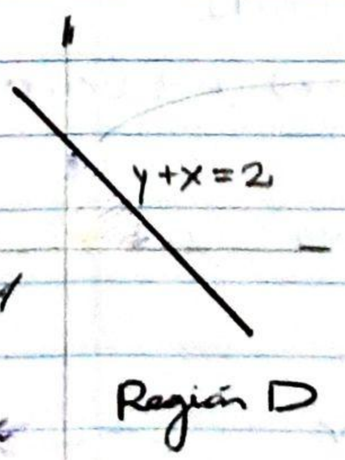
$$\mu = y - x \qquad \mu = y - x$$
$$\nu = y + x \longrightarrow \nu = y + x$$

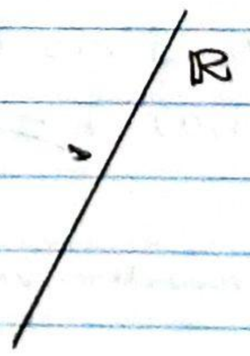
$$\begin{cases} \mu+\nu = 2y \to y = \mu+\nu/2 \\ \mu-\nu = -2x \to x = \nu-\mu/2 \end{cases}$$

Para:
- $y=0 \Rightarrow \nu=-\mu$
- $x=0 \Rightarrow \nu=\mu$
- además $x+y=2$
  ↳ $\nu=y+x$
  → $\nu=2$



Transformación





Jueves 27 / Junio / 2019

Teorema $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, función definida en un abierto $(D < \mathbb{R}^3)$

$\hookrightarrow T(u,v,w) = (x,y,z) = (g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w))$

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dy$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dv = \iiint_D f(g_1,g_2,g_3)\, J(u,v,w)\, du\, dv\, dw$$

donde $|J(u,v,w)|$

- COLORARIO: como colorario de este teorema podemos establecer que para $f(x,y,z) = 1$ se tiene el sólido de D

$$\iiint_D dv = \iiint |J(u,v,w)|\, du\, dv\, dw$$

es:

$$V = \int_a^b \int_c^d \int_m^n k\, dv = k \int_a^b \int_c^d \int_m^n dv$$

$$V = k(m-n)(d-c)(b-a)$$

Ejemplo (1) Calcular $I = \iiint_D xy^2 dy$

donde D es el sólido generado por los vectores $A(1,1,0)$ $B(0,2,2)$ $C(0,0,3)$

Sol: El sólido es un paralelepípedo; todo vector $\bar{x} = (x,y,z) \in D$, se puede expresar como una cadicional de A, B y C

ES DECIR $\exists\, r,s,t \in [0,1]$

$$r(1,1,0) + s(0,2,2) + t(0,0,3) \Rightarrow \begin{cases} x = r \\ y = r + 2s \\ z = 2s + 3t \end{cases}$$

Elegimos nuestras variables: $u = r$, $v = s$, $w = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = u + 2v \\ z = 2v + 3w \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{y-x}{2} \\ w = z - (y-x)/3 \end{cases}$$

Classic

Definimos la transformación: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

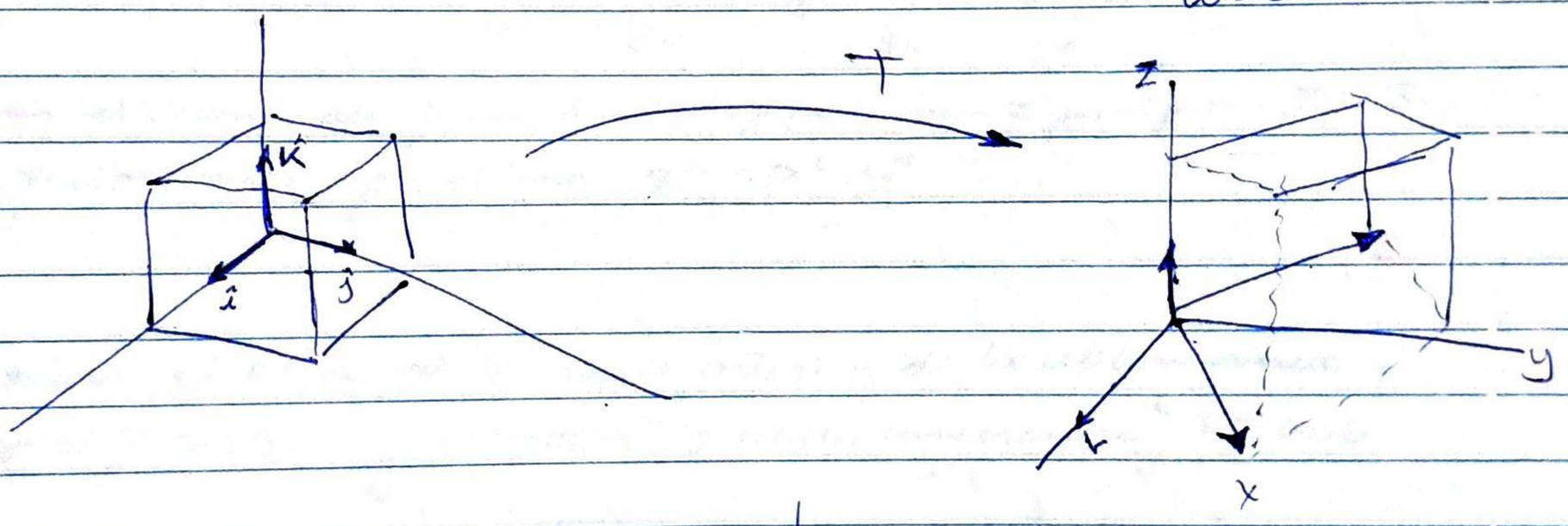
$$(u,v,w) \overset{T}{=} (u,v,w) = (x,y,z) = (u, u+2v, 2v+3w)$$

La transformación $T(D^*) = D$ forma el cubo unitario D^* en un paralelepípedo D,

en cambio el T^{-1} hace lo contrario:

$$T^{-1}(x,y,z) = (u,v,w) = \left(x, \frac{y-x}{2}, \frac{z-y+x}{3}\right)$$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde $D^* = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u=[0,1],\ v=[0,1],\ w=[0,1]\}$
T^{-1}



el jacobiano de T es: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$$I = \iiint xy^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 6u(u+2v)^2 \, du\, dv\, dw$$

↓ resolución como una integral normal

Classic

Balotario: Exam final Calculo III - Jean B.

(1) Considerando el volumen de una esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$. Hallar el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(2) Sea $z = H\left(\frac{e^x+e^y}{x}\right) \cdot G\left(\frac{y}{e^x-e^y}\right)$. Hallar $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$

(3) Sea $(\cos x) - x(\operatorname{sen} u) + y(\cos v) - \operatorname{sen} y = 0$
$(\operatorname{sen} x) - y(\operatorname{sen} u) + x(\cos v) - \cos y = 0$

Implícitamente hallar $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ y $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}$

(4) Hallar el volumen del sólido limitado superiormente por el plano $z=3$ e inferiormente por el cono $z^2 = x^2+y^2$

(5) Hallar el área de la región interior de la circunferencia $r = 3\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $r=\cos\theta$

(6) Integral doble cuya función tenga como término máximo entero

(7) Encontrar el volumen de la región arriba del plano x^0 ~~(o xy (me equivoco))~~ y limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro ~~$x^2+y^2=a^2$~~ $x^2+y^2=a^2$

Para encuesta:

$$\int \iint \left[\left[\frac{1}{x^2+2x+1}\right] \cdot e^{x^x} \cdot dx\right.$$

tipo UNI

$$\left.\iint \left[\left[0\,2x + 3y\right] + 15x - 1\right]\right] dx\,dy$$

2019-1 Metalúrgica

CIN NSH.

Examen Final de Calculo III

Escuela P. de Ing. Metalurgica

FACULTAD DE Geología

(1) Sea la función f definida por:

3pto

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determine si f es continua en $(0,0)$

(2) Si $f(x,y)=\int_y^{x^3}\cos(\pi t^2)\,dt$ Calcular $f_x(3,-2)$ / $f_y(3,-2)$

2pto

(3) Sea la función definida por:

3pto

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{dydx}$ y $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{dxdy}$

(4) El tiempo que demanda cavar un tunel de una mina es proporcional al cuadrado de la longitud del tunel. tres máquinas ubicadas en los puntos $A(-1,1)$, $B(2,1)$ y $C(1,-2)$ del borde de la mina, deben cavar Tuneles rectos hasta encontrarse los tres en un punto (x,y) de modo que el número de horas-máquina sea mínima. Hallar las coordenadas del pto de encuentro (x,y).

4pto

(5) Calcular $\iiint_D \sqrt{4-z}\,dV$ donde D es el sólido limitado por los cilindros. $y^2=2x$, $y^2=8-2x$, $y^2=4-z$ y el plano $z=0$.

4pto

Pregunta adicional: Resolver

$$I_1=\int \frac{x^2\,dx}{(x\cos x-\operatorname{sen}x)^2}$$ 2pto

$$I_2=\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}^2 x\,dx$$ 2pto

RESOLUCIÓN DEL EXAMEN FINAL, EP ING METALÚRGICA, PROF.
FÉLIX LEÓN 2019-1

Sol 1.

1) $f(0,0) = 0$]

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe $\rightarrow L = 0$

demostrando.

$\forall \varepsilon > 0 \, , \exists \delta > 0 \; / \; 0 < |x| < \delta \wedge 0 < |y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$, en efecto

$$\left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{15x^2|y|}{x^2+y^3} = \frac{5x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{5(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = 5|y| < 5\delta = \varepsilon$$

$\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{5}$

ya $x^2 \leq x^2+y^2$

Tomando ~~$\delta > \frac{\varepsilon}{5}$~~ $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ se tiene

$\forall \varepsilon > 0 \, , \exists \, \delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0 \; / \; 0 < |x| < \delta \wedge 0 < |y| < \delta \rightarrow \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$, esto demuestra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Sol 2

Si $f(x,y) = \int_y^{x^3} \cos(\pi t^2)\, dt$. Calcula $f_x(3,-2)$ y $f_y(3,-2)$

$\rightarrow f_x(x,y) = \cos \pi x^6 \cdot 3(x^2) = 3x^2 \cos(\pi x^6)$

evaluando $f_x(3,-2) = 3(3)^2 \cos \pi (3)^6 = 27 \cos(729\pi) = 27(-1) = -27$

$\rightarrow f_y(x,y) = -\int_{x^3}^{y} \cos(\pi t^2)\, dt = -\cos(\pi y^2)\,(1) = -\cos(\pi y^2)$

evaluando $f_y(x,y) = f_y(3,-2) = -\cos(\pi(-2)^2) = -\cos(4\pi) = -1$

Segunda forma:

Sea $f(t) = \cos(\pi t^2)$ $\Rightarrow f(x,y) = \int_y^{x^3} f(t)\, dt$

POR EL 2° TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

- $f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f(x^3) \cdot \frac{\partial (x^3)}{\partial x} - f(y) \cdot \frac{\partial (y)}{\partial x} = 3x^2 \cos(\pi(x^3)^2) = 3x^2 \cos(\pi x^6)$

- $f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x^3) \cdot \frac{\partial (x^3)}{\partial y} - f(y) \cdot \frac{\partial (y)}{\partial y} = -\cos(\pi y^2) = -\cos(\pi y^2)$

Sol 3.

Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)(x^3-3xy^2) - 2x^2y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

Ahora

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(0+h)\,0\,|(0+h)^2 - 0^2| - 0]}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\left((0+k)(0^4+4(0)^2(0+k)^2 - (0+k)^2 - 0\right) / (0^2+(0+k)^2)^2}{k}$$

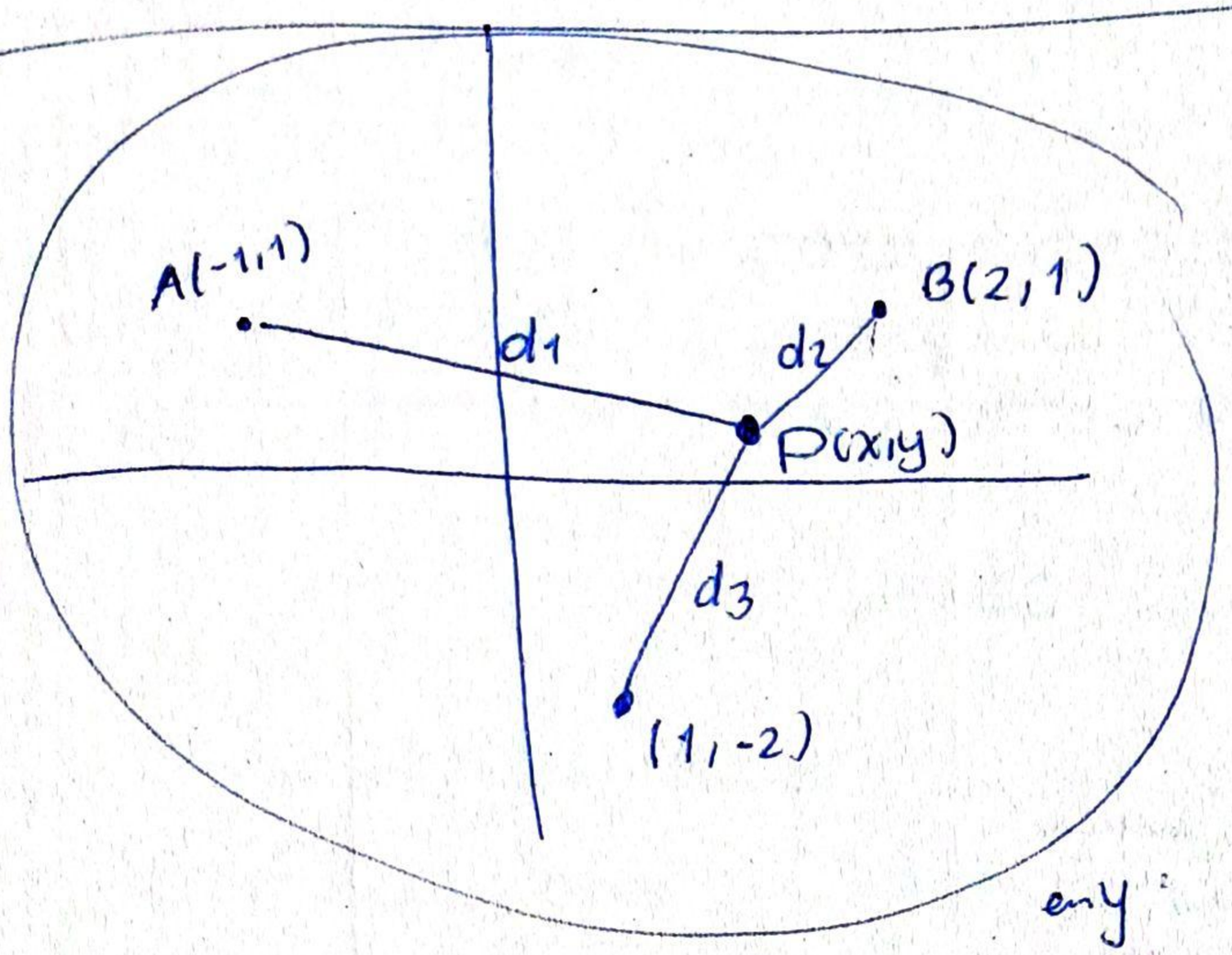
$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k(k^4)}{k^4}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k}{k} = \lim_{k\to 0} (-1) = \boxed{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f_y(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left((0+h)\left[(0+h)^4 - 4(0+h)^2(0) - 0\right]\right) / ((0+h)^2+0^2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h(h^4)}{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} (1) = \boxed{1}$$

Sol 4



$d_1 = d_1(PA) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$

$d_2 = d_2(PB) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$

$d_3 = d_3(PC) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$

Como el tiempo en la construcción es proporcional del tunel al cuadrado de su longitud °

$f(x,y) = K \cdot d_1^2 = K\left((x+1)^2 + (y-1)^2\right)$

$f(x,y) = K \cdot d_2^2 = K\left((x-2)^2 + (y-1)^2\right)$

$f(x,y) = K \cdot d_3^2 = K\left((x-1)^2 + (y+2)^2\right)$

luego el tiempo total de construcción de los 3 túneles

$T(x,y) = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)K$

$T(x,y) = K\left[(x+1)^2 + 2(y-1)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + (y+2)^2\right]$

$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = K\left[2(x+1) + 2(x-2) + 2(x-1)\right] = K(6x-4) = 0 \begin{cases} K=0 \vee 6x-4=0 \\ K \neq 0;\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = K\left[4(y-1) + 2(y+2)\right] = K(6y) = 0 \quad \{ 6y=0 \rightarrow y=0$

por tanto el punto crítico $(2/3, 0)$

en x. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 6K \rightarrow \frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial x^2} = 6K > 0$, si $K > 0$

en y:

$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 6K \rightarrow \frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial y^2} = 6K > 0$, si $K > 0$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial x \partial y} = 0$

$D = \left(\frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial x \partial y}$

$= (6K)(6K) - 0 = 36K^2 > 0$

Como $\Delta > 0$, $\frac{\partial^2 T(2/3,0)}{\partial x^2} > 0 \exists$ mínimo en $(2/3, 0)$

°° El punto de encuentro de las tres más próximo es $P(2/3, 0)$ en el tiempo mínimo de

$T(2/3,0) =$

$\left(\frac{2}{3}+1\right)^2 + 2(0-1)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + (0+2)^2$

$= 10.6$

$t = \underline{10.6}$

5 $\iiint_D \sqrt{4-z}\, dV$

$y^2 = 2x$, plano xy

$y^2 = 8-2x$, plano xy

$zy^2 = 4-z$, plano yz

Intersectando

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y^2 = 8-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8-2x \\ \hookrightarrow x = 2 \end{cases}$$

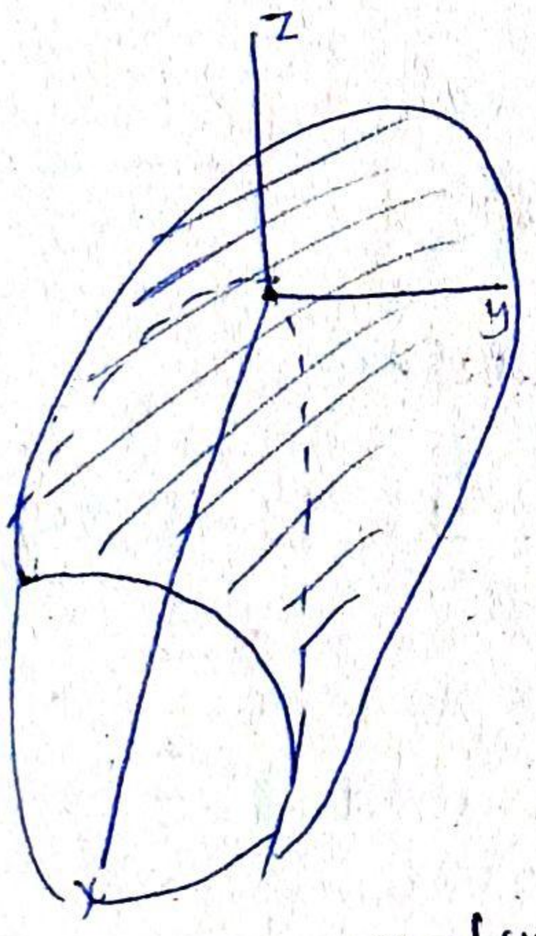
para $x=2 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$ los puntos de intersección

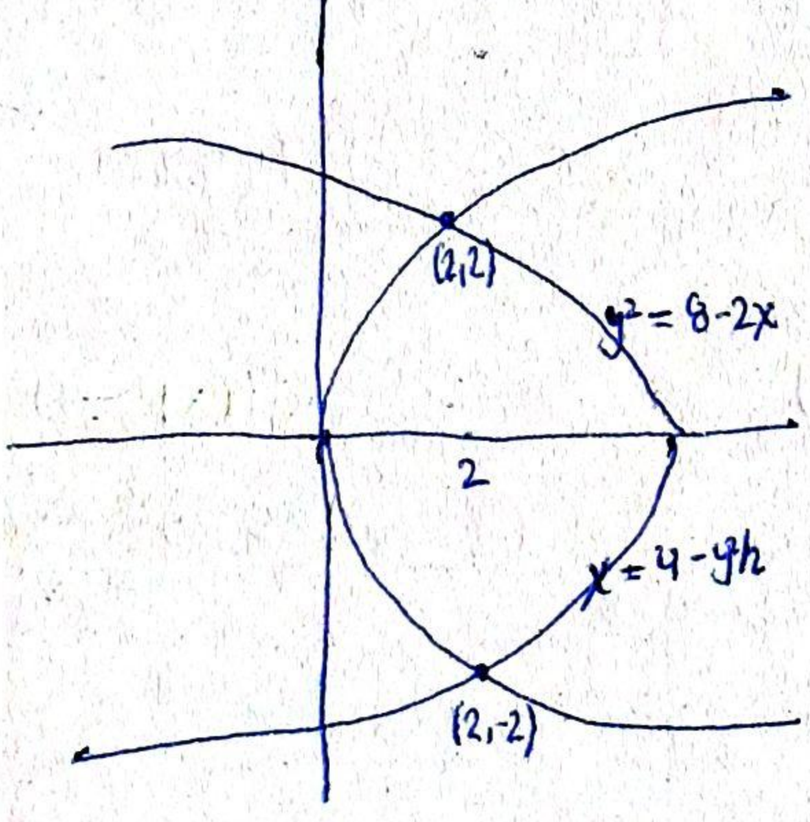
$(2,2)$ y $(2,-2)$.

de $y^2 = 4-z$ despejando se tiene:

$z = y^2 - 4$ cilindro y $z = 0$

de la figura se tiene





$$D = \{(x,y,z) / -2 \le y \le 2,\ \frac{y^2}{2} - x \le 4 - \frac{y^2}{2}$$

$$0 \le z \le 4-y^2$$

$$\iiint_D \sqrt{4-z}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{y^2/2}^{4-y^2/2} \int_{0}^{4-x^2} \sqrt{4-z}\, dz\, dx\, dy$$

$$= \frac{512}{9}$$